N° d'ordre : 597 Année 1974

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

LIU HSU

Ingénieur et Maitre ès Sciences
I T A, S. José dos Campos, Brésil

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DES RÉCURRENCES NON LINÉAIRES - APPLICATION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES CONSERVATIFS

Soutenue le 22 avril 1974 devant la Commission d'Examen

MM. J. LAGASSE — Président

I. GUMOWSKI
P. VIDAL
M. HENON
C. MIRA
— Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549604_0031

N° d'ordre : 597 Année 1974

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

LIU HSU

Ingénieur et Maitre ès Sciences
I T A, S. José dos Campos, Brésil

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DES RÉCURRENCES NON LINÉAIRES - APPLICATION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES CONSERVATIFS

Soutenue le 22 avril 1974 devant la Commission d'Examen

MM. J. LAGASSE — Président

I. GUMOWSKI
P. VIDAL
M. HENON
C. MIRA
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE

DIRECTION DE L'UNIVERSITE

M. LARENG	Président
M. MATHIS	1er Vice-Président
M. MARTIN	2ème Vice-Président

U.E.R. SCIENTIFIQUES

HONORARIAT

M. BEDOS	Professeur honoraire
M. BLAIZOT	Doyen honoraire
M. CAPDECOMME	Doyen honoraire, Recteur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. DUPOUY	Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S. Professeur honoraire.
M. DURAND Emile	Doyen honoraire
M. GAUSSEN	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES	Professeur honoraire
M. MASDUPUY	Professeur honoraire
M. MATHIS	Doyen honoraire
M. MIGNONAC	Professeur honoraire
M. MORQUER	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. SECONDAT	Professeur honoraire
M. TEISSIE - SOLIER	Professeur honoraire
M. VANDEL	Professeur honoraire, Membre de l'Institut

PROFESSEURS

M. CASTERAS	Géologie, Correspondant de l'Institut
M. CAPDECOMME	Minéralogie, Correspondant de l'Institut
M. NOUVEL	Biologie Générale
M. GALLAIS	Chimie, Correspondant de l'Institut

M. DURAND Emile	Physique
M. FERT	Physique
M. LESBRE	Chimie Organique
M. BRUNEL	Physiologie Végétale
M. HURON	Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS	Pédologie
M. TRICHE	Chimie Analytique et Spectrographie
M. LEDOUX	Zoologie Appliquée
M. RIVALS	Agriculture
M. PERRIER	Physique
M. MATHIS	Chimie
M. ORLIAC	Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE	Physique
M. ANGELIER	Zoologie
Melle de FERRE	Botanique
M. FARRAN	Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET	Physique Théorique et Calcul Numérique
M. SERFATY	Biologie Animale
M. LAGASSE	Electrotechnique
M. BLANC	Physique Nucléaire
M. LEREDDE	Botanique
M. LELUBRE	Géologie
M. TROCHAIN	Botanique
M. LALAGUE	Mathématiques Générales
M. BOUIGUE	Astronomie
M. COUCHET	Physique
M. LASCOMBES	Botanique
M. ASSELINEAU	Chimie Biologique
M. MAURET	Chimie Systématique
M. AGID	Physiologie
M. MONTANT	Cryptogamie
M. GAUTIER	Physique
M. CRUMEYROLLE	Mathématiques
M. GOURINARD	Géologie
M. PULOU	Minéralogie
M. CAMBOU	Physique Spatiale
M. MIQUEL	Chimie
M. LACOSTE	Electrotechnique
M. THIBAULT	Mécanique Rationnelle et Appliquée
M. MASCART	Mathématiques
M. MEDIONI	Psychophysiologie
M. RAYNAUD Pierre	Physiologie animale
M. ZALTA	Chimie Biologique
M. SEVELY	Electrotechnique
M. POMMIEZ	Mathématiques
M. REY Paul	Biologie Végétale
M. COULOMB	Physique
M. TRINQUIER	Physique
M. MARONI	Chimie

M. BEETSCHEN	Biologie Générale
M. DERACHE	Physiologie Animale
M. SATGE	Chimie Organique
M. LATTES	Chimie
M. VEDRENNE	Géophysique
M. DURAND-DELGA	Géologie
M. CARRARA	Physique
M. JEANNIN	Chimie Minérale
M. MAHENC	Chimie
M. MIROUSE	Géologie
M. BITSCH	Zoologie

PROFESSEURS ASSOCIES

M. ANDERSON

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BRUNEL	Physiologie Végétale
M. PICCA	Physique
M. MERIC	Mathématiques Appliquées
Mme LECAL	Zoologie
M. PILOD	Physique
M. LARROQUE	Physique
M. BARRANS	Chimie
Mme LAFON	Mathématiques
Melle LAPEYRE	Mathématiques-Informatique
M. BERTRAND	Chimie
M. DESQ	Mathématiques
M. ROCARD	Electronique
M. DEGEILH	Physique
M. POILBLANC	Chimie
M. TOUZE	Physiologie Végétale
M. FRASNAY	Mathématiques
M. CASSAGNAU	Zoologie
M. GUERIN	Mathématiques
M. PESCIA	Physique
M. SOUQUET	Géologie
M. SCHNEIDER	Biologie Cellulaire
M. SICARD	Biologie Génétique
M. de LOTH	Chimie Physique
M. MARTIN J.C.	Génie Electrique
M. SAPORTE	Physique
M. PERENNOU	Informatique
M. THENOZ	Génie Civil

M. REY Gérard	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. CAUSSINUS	Mathématiques Appliquées
M. DURAND Ph.	Physique
M. CASTAN	Informatique
M. REME	Mesures Physiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. FONTAN	Physique Nucléaire
M. BAUDRAS	Chimie Biologique
M. ATTEIA	Mathématiques
M. CALVET	Mécanique des Fluides
M. PAGANI	Physique
M. CUPPENS	Mathématiques
Melle BARBANCE	Mathématiques
M. VERDIER	Physique
M. GILLY	Génie Mécanique
M. BEAUFILS	Informatique
M. COTTU	Génie Mécanique
M. ROUTIE	Génie Chimique
M. MARAL	Physique
M. BERTHELEMY	Zoologie
M. HURAUX	Physique
M. LEGRAND	Génie Civil
M. ABATUT	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. SOTIROPOULOS	Chimie Organique
Mme GERVAIS	Chimie Inorganique
M. BONEL	Chimie
M. MAUSS	Mécanique
M. TERJANIAN	Mathématiques

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. PRADINES	Mathématiques
M. NGUYEN THANH VAN	Mathématiques
M. BANCEL	Mathématiques
M. BETOURNE	Informatique
M. CAMPAN	Psychophysiologie
M. CLERC	Mathématiques
M. GRIFONE	Mathématiques

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. NOUGARO	Hydraulique Générale et Appliquée
M. GARDY	Génie Chimique
M. BIREBENT	Electronique Appliquée
M. VOIGT	Chimie Minérale
M. MONTEL	Chimie Physique et Electrochimie
M. THIRRIOT	Hydrodynamique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. GRUAT	Mécanique des Fluides (Hydraulique)
M. BUGAREL	Génie Chimique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT	Botanique
Melle BERDUCOU	Physiologie Végétale
M. DAT	Mécanique des Fluides
M. FALLOT	Biologie Végétale (Viticulture et Arboriculture)
M. TRUCHASSON	Mécanique
M. HOFFMANN	Electronique
M. ENJALBERT	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES

M. MARTY	Physique Industrielle
M. LEFEUVRE	Electronique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. ANGELINO	Génie Chimique
M. DABOSI	E.N.S.C.T.
M. MATHIEU	Chimie Analytique
M. TRANNOY	Physique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. CASTAGNETTO	Mathématiques (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. GILOT	Génie Chimique (Institut de Génie Chimique)
M. CALMON	Techniques Agricoles
M. MATHEAU	Electronique

M. REY Gérard	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. CAUSSINUS	Mathématiques Appliquées
M. DURAND Ph.	Physique
M. CASTAN	Informatique
M. REME	Mesures Physiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. FONTAN	Physique Nucléaire
M. BAUDRAS	Chimie Biologique
M. ATTEIA	Mathématiques
M. CALVET	Mécanique des Fluides
M. PAGANI	Physique
M. CUPPENS	Mathématiques
Melle BARBANCE	Mathématiques
M. VERDIER	Physique
M. GILLY	Génie Mécanique
M. BEAUFILS	Informatique
M. COTTU	Génie Mécanique
M. ROUTIE	Génie Chimique
M. MARAL	Physique
M. BERTHELEMY	Zoologie
M. HURAUX	Physique
M. LEGRAND	Génie Civil
M. ABATUT	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. SOTIROPOULOS	Chimie Organique
Mme GERVAIS	Chimie Inorganique
M. BONEL	Chimie
M. MAUSS	Mécanique
M. TERJANIAN	Mathématiques

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. PRADINES	Mathématiques
M. NGUYEN THANH VAN	Mathématiques
M. BANCEL	Mathématiques
M. BETOURNE	Informatique
M. CAMPAN	Psychophysiologie
M. CLERC	Mathématiques
M. GRIFONE	Mathématiques

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. NOUGARO	Hydraulique Générale et Appliquée
M. GARDY	Génie Chimique
M. BIREBENT	Electronique Appliquée
M. VOIGT	Chimie Minérale
M. MONTEL	Chimie Physique et Electrochimie
M. THIRRIOT	Hydrodynamique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. GRUAT	Mécanique des Fluides (Hydraulique)
M. BUGAREL	Génie Chimique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT	Botanique
Mlle BERDUCOU	Physiologie Végétale
M. DAT	Mécanique des Fluides
M. FALLOT	Biologie Végétale (Viticulture et Arboriculture)
M. TRUCHASSON	Mécanique
M. HOFFMANN	Electronique
M. ENJALBERT	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES

M. MARTY	Physique Industrielle
M. LEFEUVRE	Electronique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. ANGELINO	Génie Chimique
M. DABOSI	E.N.S.C.T.
M. MATHIEU	Chimie Analytique
M. TRANNOY	Physique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. CASTAGNETTO	Mathématiques (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. GILOT	Génie Chimique (Institut de Génie Chimique)
M. CALMON	Techniques Agricoles
M. MATHIEU	Electronique

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. ROQUES	Chimie Industrielle
M. GRATELOUP	Génie Electrique
M. MASO	Génie Civil
M. MIRA	Génie Electrique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. COLETTE	Physique
M. FAGET	Physique
M. DURAND Gilbert	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES

M. SCHUTTLER	Physique
M. LETURCQ	Génie Electrique
M. SIRIEYS	Mécanique et Génie Civil
M. BROUSSEAU	Physique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. LACAZE	Mathématiques

ADMINISTRATION

M. PRINEAU	Secrétaire Général de l'Université Paul Sabatier

A mes parents.

AVANT-PROPOS

Ce mémoire est l'aboutissement des travaux que nous avons poursuivis au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique. Monsieur le Professeur LAGASSE a bien voulu nous accorder sa confiance en acceptant que les recherches de ce mémoire soient menées dans le cadre du Laboratoire qu'il dirige. Nous lui exprimons notre profonde gratitude pour cette marque d'estime. En outre, en acceptant la Présidence du Jury qui doit juger ce travail, il nous a fait un grand honneur auquel nous avons été particulièrement sensible .

Nous tenons à remercier vivement Monsieur GUMOWSKI, Professeur à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève et Physicien au C.E.R.N. Nos travaux ont grandement bénéficié de ses connaissances dans le domaine abordé.

Monsieur HENON, Directeur de Recherche à l'Observatoire de Nice, a bien voulu s'intéresser à notre travail. Qu'il trouve ici l'expression de notre plus sincère gratitude.

Nos remerciements vont également à Monsieur le Professeur VIDAL, de l'Université de Lille, qui, malgré ses multiples occupations, a bien voulu nous honorer en acceptant de participer à la Commission d'Examen.

Que Monsieur le Professeur MIRA trouve ici le témoignage de notre profonde reconnaissance pour la conscience et le dynamisme avec lesquels il a dirigé notre travail. Il nous est difficile de lui exprimer toute notre gratitude pour les enseignements et critiques qu'il nous a si souvent prodigués.

Nous remercions, de façon particulièrement chaleureuse, Messieurs ABATUT et BERNUSSOU pour leur collaboration amicale.

Cet avant-propos nous fournit l'occasion de manifester notre reconnaissance à différents organismes: l'Instituto Tecnológico de Aeronáutica et la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, qui ont rendu possible notre séjour en France; la Direction Générale des Affaires Culturelles et Techniques du Ministère des Affaires Etrangères Français, pour l'aide qu' elle nous a procurée.

Messieurs DUREIGNE et JONCKHEERE ont bien voulu examiner le manuscrit de ce mémoire. Qu'ils trouvent ici la manifestation de notre amicale reconnaissance.

Nous remercions enfin tous ceux grâce à qui le présent mémoire a été réalisé, et plus particulièrement Mesdames SOM et IPPOLITO et Monsieur LAPEYRE-MESTRE.

INTRODUCTION

La théorie des Systèmes Dynamiques s'est tout d'abord développée en tant que branche de la théorie des équations différentielles ordinaires, avec les célèbres travaux de Henri POINCARE.

Depuis quelques années cette notion a été étendue au cas de systèmes qui, soit directement, soit indirectement, sont décrits par des relations telles que :

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{F}(\underline{x}_n) \qquad (0\text{-}1)$$

ou

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{x}_n, n) \qquad (0\text{-}2)$$

$\underline{x}_n$ étant un vecteur de dimension N, et n un entier.

La première de ces relations est dite équation aux récurrences autonome et la deuxième, équation aux récurrences non autonome.

Une équation telle que (0-1) définit aussi une transformation ponctuelle qui fait correspondre à un point M_n $(\underline{x}_n)$ de l'espace à N dimensions, un point M_{n+1} $(\underline{x}_{n+1})$ du même espace. Dans le cas non autonome cette transformation est définie pour un n donné.

D'un point de vue formel on parle de Systèmes Discrets lorsque la variable de temps considérée est discrète, comme pour les systèmes d'équations aux récurrences définis ci-dessus;

L'étude des équations aux récurrences, ou simplement récurrences ne présente pas un intérêt purement mathématique mais elle trouve aussi une importance croissante dans le domaine des applications concrètes

En effet les équations telles que (0-1) ou (0-2) constituent les modèles mathématiques des systèmes à information discrète (Systèmes à Données Echantillonnées, Systèmes à Impulsions, Systèmes à Commande par Ordinateur, ...). En outre ces équations peuvent servir d'outil pour étudier les systèmes à information continue avec paramètre variant périodiquement

dans le temps et les systèmes utilisant des éléments discontinus (relais, thyristors, ...). A l'opposé des équations différentielles relativement peu d'études ont été menées dans le domaine des récurrences. Ceci ne peut que renforcer l'intérêt des recherches sur les méthodes d'établissement de modèles mathématiques de la forme (0-1) ou (0-2) et sur les propriétés des solutions de ces équations aux récurrences.

00o00

Historiquement c'est en tant qu'outil associé à une équation différentielle décrivant un système continu, que s'est développée l'étude des équations telles que (0-1). En effet, pour mettre en évidence la notion de cycle limite Poincaré fut le premier à associer à une équation différentielle autonome d'ordre 2, une récurrence autonome du 1er ordre, les points doubles de cette récurrence correspondant à des cycles limites de l'équation différentielle. Ceci fut étendu par lui-même au cas des équations différentielles du 3ème ordre et des équations différentielles à coefficients périodiques du 2ème ordre auxquelles était associée une récurrence autonome du 2ème ordre (appelée aussi, transformation d'une surface en elle-même).
Cette extension était surtout liée au problème restreint des trois corps (système différentiel autonome du 4ème ordre) auquel il consacra une grande partie de son ouvrage "Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste". A l'aide d'une intégrale connue le problème était ramené à celui des équations différentielles du 3ème ordre et la transformation ponctuelle associée était définie par l'intermédiaire d'une "surface de section". De plus cette transformation possédait un invariant intégral à deux dimensions, c'est-à-dire qu'elle était "conservative".

L'idée directrice de l'utilisation d'une transformation ponctuelle était de diminuer l'ordre effectif du problème initial où d'en éliminer la dépendance explicite par rapport au temps (cas des coefficients périodiques).

Cette méthode, qui dans un premier temps s'appliquait surtout aux problèmes de la Mécanique Céleste, a trouvé un champ fertile dans plusieurs branches des Sciences Appliquées telles que l'Electronique, [17] , la Mécanique des Particules [43 _ 44 _ 46] , la Commande Automatique [16 _ 17] , la Théorie des Oscillations et la Dynamique des Satellites [45] .

Les travaux de G.D. BIRKOFF sur les transformations ponctuelles et les systèmes dynamiques ont augmenté considérablement la portée de la méthode décrite ci-dessus ainsi que la connaissance des propriétés des solutions des équations aux récurrences, dans le cas conservatif du second ordre.

Les premières recherches de caractère nettement appliqué se trouvent parmi les travaux des auteurs russes, notamment A.A. ANDRONOV , N.N. BAUTIN et A.G. MAYER qui ont utilisé la méthode des transformations ponctuelles pour étudier la dynamique d'un certain nombre de systèmes linéaires par morceaux. En particulier furent ainsi traités (1944-1947) les problèmes de Vyshnegradski et Mieses concernant la commande et la stabilisation automatique d'un avion. D'autres applications se trouvent décrites dans l'ouvrage bien connu d'Andronov "Théorie des Oscillateurs" [17] .

Les recherches d'Andronov furent reprises par ses disciples au sein du groupe connu sous le nom d'Ecole de Gorki qui a effectué de nombreux travaux dans cette direction. Ces travaux portent surtout sur les cas critiques de stabilité au sens de Lyapunov, les bifurcations par traversée de cas critiques, l'application à des problèmes d'équations différentielles et l'application à un grand nombre de systèmes physiques. Y. NEIMARK est parmi les plus représentatifs des auteurs de cette Ecole [16] .

En outre, de nombreux travaux concernant les transformations ponctuelles conservatives ont paru depuis 1954. Les résultats de KOLMOGOROV, V.I. ARNOLD et J. MOSER ont permis un certain progrès dans ce domaine.

Dû à la complexité et à l'extrême instabilité de certains mouvements qui peuvent apparaître, d'autres auteurs, utilisant la théorie Ergodique, ont été menés à une description statistique (BIRKHOFF, HOPF, ANOSOV, SINAI, ... [36]). Cependant les résultats disponibles sont encore limités à une classe très spéciale de mouvements, de sorte que l'étude de cas plus courants doit faire appel à des procédés basés sur le calcul numérique ou sur des méthodes "mixtes", analytiques-numériques [36][40 à 43] . Ces mouvements complexes loin d'être des cas particuliers, ont été mis en évidence dans plusieurs systèmes (même non conservatifs) [42 - 47 - 50 - 49].

L'étude des transformations conservatives est liée à des problèmes physiques tels que :

- mouvement d'une étoile dans une galaxie [59]
- oscillations planes d'un satellite sur orbite elliptique [45]
- mouvements d'oscillateurs couplés
- focalisation de particules dans un accélérateur [43]
- oscillations de satellites, stabilisés par moment cinétique, lorsque les inerties sont des fonctions périodiques du temps [51] .

Les récurrences utilisées comme modèle mathématique des systèmes à information discrète ont fait l'objet d'études poussées, surtout dans le domaine de l'Automatique. C'est ainsi que la théorie des systèmes à données échantillonnées a été développée dans les cas linéaire et non linéaire [19 - 55 - 56] . Cependant la portée des résultats dans le cas non linéaire reste encore très limitée.

Les systèmes à modulation d'impulsion ont aussi fourni des thèmes de travail dans ce domaine [57] .

De son côté, l'équipe "Mécanique non linéaire" du Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S. s'est surtout attachée depuis quelques années, à développer et à compléter la connaissance des propriétés des solutions des équations aux récurrences non linéaires, visant l'application des résultats à d'études telles que :

- l'influence de non linéarités sur le comportement de système à données échantillonnées [8 - 9 - 10]

- l'analyse de certains systèmes avec éléments à fonctionnement discontinu tels que les redresseurs contrôlés de courant alternatif avec commande en boucle fermée [52 - 58]

- certains problèmes de programmation non linéaire [26]

- les systèmes commandés par impulsions modulées en fréquence (IPFM) [53]

- certains systèmes dynamiques conservatifs décrits par des équations différentielles à coefficients périodiques du second ordre qui vent, par exemple, représenter en première approximation le mouveme transversal d'une particule dans un accélérateur à gradient alternatif [...] .

- quelques problèmes relatifs aux satellites qui peuvent être ramenés à la considération d'une équation du type précéden [51] .

Sur un plan plus théorique ces études ont porté sur des points concernant les propriétés des solutions des systèmes d'équations aux récurrences (dans le cas réel) comme :

- l'analyse des états stationnaires (points doubles, cycles, régions à comportement "stochastique" de caractère attractif, etc..) notamment en ce qui concerne la stabilité locale et globale [8 - 52] (cas du second ordre).

- l'étude des cas critiques (second ordre) au sens de Lyapunov, correspondant à l'existence d'un seul multiplicateur réel unitaire ou de deux

multiplicateurs du type $e^{\pm j\varphi}$ [9 - 7] . En particulier les cas de la résonnance paramétrique ont été envisagés (cas d'exception pour certaines valeurs de φ commensurables avec 2π) [40] .

- l'étude de cas critiques pour les récurrences d'ordre supérieur à deux :

- le cas du 4ème ordre à 4 multiplicateurs complexes du type $e^{\pm j\varphi_1}$, $e^{\pm j\varphi_2}$ [54] .

- le cas d'ordre $n > 2$ à 2 multiplicateurs du type $e^{\pm j\varphi}$ tous les autres étant inférieurs à l'unité en module (et non nuls) [26]

- l'étude des changements de comportement qualitatifs de la solution d'une récurrence, par traversée d'un cas critique sous l'effet d'une variation de paramètre [18]

- l'analyse du comportement d'un système conservatif décrit par une équation différentielle du second ordre à coefficients périodiques [26] [33]

- l'étude des propriétés de solutions à comportement stochastique [47_ 22] de certaines transformations ponctuelles conservatives ou non conservatives.

Ce rappel historique permet de situer le travail présenté dans ce mémoire qui porte essentiellement sur deux problèmes :

I - Etude du cas critique pour une récurrence réelle et autonome, du second ordre, à seconds membres analytiques, possédant à l'origine un point double caractérisé par deux multiplicateurs unitaires de multiplicité deux. Cette étude est entreprise en utilisant trois méthodes différentes :

a) Mise en évidence de courbes invariantes (au sens défini au 1er chapitre) passant par l'origine, ce qui permet dans certains cas de conclure à l'instabilité de l'origine. Il est alors possible d'établir l'allure des trajectoires discrètes au voisinage de l'origine

b) Formulation de critères de stabilité ou d'instabilité en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov pour un système d'équations différentielles (à coefficients périodiques) associé à la récurrence étudiée. L'existence d'un tel système différentiel est démontrée au 2ème chapitre dans un contexte plus général. L'apparente contradiction de recourir à la considération d'une formulation différentielle est soulevée par le fait que les coefficients qui dépendent du temps dans le système différentiel associé correspondent aux termes de degré aussi élevé que l'on veut (ce degré peut être fixé "a priori"). On ne considère que les cas où la stabilité est fixée par un nombre fini de termes du développement en série de la récurrence donnée (et par conséquent, du système différentiel associé.) Le problème de la stabilité revient alors à la question de la stabilité selon une approximation d'ordre fini, au sens de MALKIN, d'un système d'équations différentielles autonome du second ordre.

c) Extension de méthodes utilisées par Lyapunov pour une étude analogue dans le cas continu [14] . Cette extension permet d'étudier la stabilité de la solution banale du système différentiel associé et par conséquent la stabilité de l'origine pour la récurrence envisagée.

L'étude du cas critique pour une récurrence, autonome d'ordre N + 2 (cas réel), à seconds membres analytiques, ayant à l'origine (point double) deux multiplicateurs unitaires de multiplicité deux, tous les autres étant non nuls et inférieurs à l'unité en module, est réduite à la considération du cas du second ordre cité plus haut (I)). La démonstration de la validité d'une telle réduction est faite à l'aide d'un théorème dû à Malkin, appliqué à un système différentiel associé à la récurrence étudiée.

Par ailleurs il est possible d'étendre ce résultat au cas critique plus général lorsqu'il y a M ($\neq 0$) multiplicateurs de module unitaire , tous les multiplicateurs restants étant non nuls et inférieurs à 1 en module.

L'étude d'un tel cas est réductible à la considération d'un cas critique d'ordre M où tous les multiplicateurs sont en module unitaires.

II - L'établissement d'une transformation ponctuelle associée à un système d'équations différentielles à coefficients périodiques qui décrit un système dynamique conservatif, n'est pas en général une opération aisée. Les cas où elle peut s'exprimer de façon explicite sont très particuliers. De plus, les expressions analytiques sont en général fort complexes. Quant aux méthodes numériques où le conséquent d'un point est calculé par intégration numérique, elles présentent deux inconvénients principaux : le temps de calcul demandé et l'impossibilité d'appliquer les résultats disponibles dans la théorie, de façon directe. Le temps de calcul devient important lorsque la précision exigée et le nombre d'itérations sont élevés. De plus, dans le cas d'une transformation conservative il est connu que les problèmes de précision sont critiques, à cause de la grande sensibilité numérique de ces transformations [39] .

A partir de la connaissance des termes initiaux du développement en séries de la transformation ponctuelle exacte, autour de l'origine (point double) il est possible de construire des transformations osculatrices jusqu'à un certain degré fixé, i.e., ayant les mêmes termes initiaux que la transformation originale, jusqu'à ce degré.

Dans un voisinage de l'origine ces transformations osculatrices ont un comportement qui se rapproche de celui de la transformation exacte, et peuvent donc la remplacer pour une étude approchée. Les transformations osculatrices proposées sont polynomiales et de calcul aisé. De plus, elles préservent le caractère conservatif du système considéré.

Le plan de ce mémoire s'établit comme suit :

1) Dans le premier chapitre sont étudiées la stabilité et la nature d'un point double d'une récurrence d'ordre deux, réelle et autonome, ayant

deux multiplicateurs unitaires de multiplicité deux.

2) Le deuxième chapitre est consacré au cas critique correspondant à une récurrence d'ordre N + 2, réductible au cas précédent. Les méthodes utilisées sont étendues à d'autres cas critiques de nature plus générale (plusieurs multiplicateurs unitaires en module).

3) Enfin, dans le troisième chapitre on traite le problème des transformations polynomiales préservant l'aire et osculatrices à une transformation analytique. La comparaison entre transformation osculatrice et exacte est faite sur plusieurs exemples, notamment celui concernant une transformation ponctuelle associée au mouvement d'un satellite stabilisé par moment cinétique.

CHAPITRE I

ANALYSE D'UN CAS CRITIQUE POUR UNE RECURRENCE AUTONOME DU SECOND ORDRE

I-1 - INTRODUCTION

Le premier chapitre a pour but l'étude de la stabilité locale d'un état stationnaire du type point double ou cycle, d'un système décrit par une récurrence analytique autonome du deuxième ordre de la forme :

$$x_1 = F(x, y) \quad , \quad y_1 = G(x, y) \qquad \text{(I-a)}$$

(ou bien : $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = G(x_n, y_n)$)

lorsque ce problème correspond à un certain cas critique au sens de Liapunov.

Sans perte de généralité, considérons seulement le cas d'un point double (x^*, y^*) de (I-a). Ce point satisfait alors les relations suivantes :

$$x^* = F(x^*, y^*) \quad , \quad y^* = G(x^*, y^*) \qquad \text{(I-b)}$$

Si l'on translate l'origine au point double (x^*, y^*), une récurrence M du type :

$$M : x_1 = ax + by + X(x, y) \quad , \quad y_1 = cx + dy + Y(x, y) \qquad \text{(I-c)}$$

peut être obtenue à partir de (I-a), X et Y étant des fonctions analytiques ne contenant dans leur développement en série que des termes de degré non inférieur à deux.

Un cas critique au sens de Lyapunov aura lieu lorsque au moins une des racines de $\begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix} = 0$ est en module égal à 1, l'allure des trajectoires discrètes dans un voisinage arbitrairement petit du point double ne peut alors se déduire de l' approximation linéaire. La stabilité dépend essentiellement des termes non linéaires dans le cas où aucune des racines précédentes est en module supérieur à 1. Ces racines sont par définition les multiplicateurs S_1 et S_2 du point double.

Si (I-c) est une récurrence réelle à variables réelles, l'analyse des cas critiques peut se réduire à la considération des situations suivantes :

I) $S_1 = 1$, $0 < S_2 < 1$

II) $S_1 = 1$, $S_2 = 1$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

III) $S_1 = e^{j\varphi}$, $S_2 = e^{-j\varphi}$ $(\varphi \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

IV) $S_1 = 1$, $S_2 = 1$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les cas restants, ayant des multiplicateurs réels négatifs, sont ramenés aux cas précédents par la considération de M^2.

Birkhoff a étudié les transformations ponctuelles du type (I-c) dans le cas conservatif [2] . En particulier il a donné une série de résultats fondamentaux concernant les cas II, III et IV ci-dessus.

Nous citons encore les contributions de Lévi-Civita [4] (cas III, φ commensurable avec 2π) et de Cigala [5] (cas III, φ non commensurable avec 2π).

Plus récemment, les trois premiers cas ont été abordés par Neimark, Mira, Roubellat, Babary et Abatut [6 _ 7 _ 8 _ 9 _ 10] .

Il est possible d'établir une relation entre les cas critiques pour une récurrence et les cas critiques pour une équation différentielle de même ordre. Ces derniers furent étudiés par Lyapunov [13] et ultérieurement, une généralisation fut entreprise par Malkin [15] .

Le premier chapitre traite le cas IV.

Le cas correspondant pour les équations différentielles a été étudié par Lyapunov [14] sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \qquad \text{(I-d)}$$

X et Y commençant par des termes de degré non inférieur à deux.

La récurrence (I-c) peut toujours être ramenée à la forme :

$$x_1 = x + y + X(x, y)$$

$$y_1 = y \quad + Y(x, y)\,, \qquad \text{(I-e)}$$

à l'aide d'un changement linéaire de variables, lorsque les conditions IV sont satisfaites.

L'intérêt de l'étude des cas critiques a été souvent souligné par plusieurs auteurs [15 - 16 - 18 - 11] . Le problème de la bifurcation ou changement qualitatif du comportement d'un système est généralement lié à l'investigation d'un cas critique lorsque certaines conditions de différentiabilité sont vérifiées. Ce problème peut être d'une grande importance pratique [11] . En effet, si l'on considère un système physique (par exemple les systèmes échantillonnés) fonctionnant près de la frontière de stabilité (dans l'espace des paramètres), il est nécessaire de connaître la nature de la bifurcation lorsqu'un certain paramètre varie (par exemple, par veillissement) afin de savoir si l'instabilité entraînée par la traversée de la frontière de stabilité représente un danger ou si son caractère purement local (stabilité pratique) permet encore l'utilisation du système. On parle alors de frontière dangereuse ou non dangereuse au sens de Bautin [11] . Ceci correspond en pratique à deux types de changement de comportement qualitatif :

- si le cas critique, au moment de la bifurcation est stable, nous aurons une frontière non dangereuse au sens de Bautin. Le changement se fait progressivement et d'une façon réversible l'effet sur les solutions étant petit avec la perturbation subit par le paramètre [12].

- si le cas critique est par contre instable, la situation est fort différente. Même des faibles perturbations du paramètre peuvent donner naissance à des modifications importantes du système avec généralement risque d'irréversibilité. La frontière est donc dangereuse au sens de Bautin.

Le but de ce chapitre est la caractérisation des singularités qui peuvent apparaître lorsque le cas critique vérifie les conditions IV, ci-dessus.

Le développement théorique de cette étude est basé sur la difficulté de traiter par une seule méthode le problème général de la stabilité. Nous distinguerons trois parties :

Premièrement sont considérées les conditions d'existence et la détermination de certains invariants analytiques, plus précisément, de courbes invariantes analytiques, réelles, passant par l'origine. Ceci permet de conclure à l'instabilité dans certains cas qui seront précisés et de déterminer l'allure des trajectoires discrètes autour de l'origine.

La deuxième partie utilise un résultat démontré au chapitre II, permettant d'associer à la récurrence (I-e) un système différentiel du second ordre à coefficients périodiques satisfaisant certaines conditions. Ce système est trouvé à partir du système différentiel formel autonome associé à (I-e) [2 _ 20] . La méthode directe (ou deuxième méthode) de Lyapunov permet de formuler d'autres critères d'instabilité et notamment, de stabilité asymptotique.

La troisième partie est basée sur une extension de la méthode utilisée par Lyapunov dans l'étude du système (I-d), aux systèmes différentiels à coefficients périodiques associés aux récurrences du type (I-e).

Il est possible de constater que les résultats de la deuxième partie peuvent aussi être obtenus par la méthode utilisée dans la troisième.

Contrairement au cas des équations différentielles le problème de la stabilité n'est pas (même le problème d'ordre deux) complètement résolu. Ceci est très vraisemblablement dû aux structures extrèmement complexes pouvant se produire autour d'une solution d'équilibre, lorsque l'on traite de transformations ponctuelles, caractérisées par la présence de points homoclines et hétéroclines. C'est le cas par exemple des points fixes elliptiques d'une transformation ponctuelle analytique préservant l'aire [2]. Bien que plusieurs travaux aient été entrepris sur ce point [21 - 22 - 23 - 24] le problème n'est pas totalement éclairci.

I-2 - DEVELOPPEMENT THEORIQUE ET ANALYSE DU CAS CRITIQUE

Soit un système décrit par la récurrence du deuxième ordre à variables réelles ci-après :

$$x_1 = x + y + X(x, y) \quad , \quad y_1 = y + Y(x, y) \qquad (I\text{-}1)$$

X, Y étant des fonctions analytiques, dont les développements en série commencent par des termes de degré non inférieur au second. L'origine O du plan (x, y) est donc un point double.

On étudie ici l'allure des trajectoires discrètes de (I-1) autour de l'origine et la stabilité de ce point.

Sont exclus certains cas particuliers se produisant lorsque l'origine n'est pas un point double isolé.

I-2-1 - Changements de variables préliminaires

Dans le but de simplifier l'analyse de (I-1) nous effectuons des changements de variables (non singuliers autour de l'origine) du type :

$$x = \bar{x} + \sum_{i+j=K} \alpha_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j$$
$$y = \bar{y} + \sum_{i+j=K} \beta_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j \qquad (K \geqslant 2) \qquad \text{(I-2)}$$

Pour chaque valeur de K, on détermine les coefficients α_{ij} et β_{ij} de façon à éliminer le plus grand nombre de termes de degré K de la récurrence résultante. Il est évident que (I-2) ne changera que les coefficients de (I-1) correspondants aux termes de degré non inférieur à K.

Considérons les fonctions X et Y écrites sous la forme

$$X(x,y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} X_{ij} x^i y^j \quad , \quad Y(x,y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} Y_{ij} x^i y^j \qquad \text{(I-3)}$$

La récurrence (I-1) devient par la substitution (I-2) :

$$\bar{x}_1 = \bar{x} + \bar{y} + \sum_{i+j=2}^{\infty} \bar{X}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j \quad , \quad \bar{y}_1 = \bar{y} + \sum_{i+j=2}^{\infty} \bar{Y}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j$$

où $\bar{X}_{ij} = X_{ij}$ et $\bar{Y}_{ij} = Y_{ij}$ si $i + j < K$

Pour les coefficients $\bar{X}_{ij}$ et $\bar{Y}_{ij}$, $i + j = K$ on obtient les relations suivantes :

$$\bar{Y}_{K0} = Y_{K0} \; ; \; \bar{X}_{K0} = X_{K0} - \beta_{K0}$$
$$\bar{Y}_{K-1,1} = \beta_{K0} \cdot K + Y_{K-1,1} \qquad \text{(I-4)}$$

$$\overline{X}_{ij} = X_{ij} - \beta_{ij} + \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{m-\ell}{j-\ell} \alpha_{K-\ell,\ell} \qquad (j \geq 1)$$

$$\overline{Y}_{ij} = Y_{ij} + \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{m-\ell}{j-\ell} \beta_{K-\ell,\ell} \qquad (j \geq 2) \qquad \text{(I-5)}$$

Il est possible de voir que les coefficients correspondants aux équations (I-5) peuvent prendre des valeurs fixées "a priori" en choisissant convenablement les α_{ij} et β_{ij}.

Les coefficients de (I-2) peuvent être choisis de façon à annuler les seconds membres de (I-5). D'autre part, de (I-4) on voit que l'on peut annuler soit $\overline{X}_{K0}$, soit $\overline{Y}_{K-1,1}$.

Si on effectue sur (I-1) successivement, des substitutions du type (I-2) avec K = 2, 3, ... M, cherchant systématiquement à annuler les $\overline{Y}_{K-1,1}$ et les expressions (I-5) la récurrence prendra, dans les nouvelles variables u, v ($x \to u$, $y \to v$), la forme suivante :

$$u_1 = u + v + \sum_{j=m}^{M} \varphi_{j0}\, u^j + O^M(u, v)$$

$$v_1 = v + \sum_{j=n}^{M} \psi_{j0}\, u^j + O^M(u, v) \quad ; M \ (\geq m, n)$$

Pour simplifier les notations, les variables u et v seront écrites x et y :

$$x_1 = x + y + \sum_{j=m}^{M} \varphi_{j0}\, x^j + O^M(x, y)$$

$$y_1 = y + \sum_{j=n}^{M} \psi_{j0}\, x^j + O^M(x, y) \quad ; M \ (\geq m, n) \qquad \text{(I-6)}$$

Si par contre on cherche à éliminer systématiquement les $\overline{X}_{K0}$ la forme finale sera :

$$x_1 = x + y + O^M(x, y)$$
$$y_1 = y + \sum_{j=n'}^{M} \tilde{\Psi}_{j0} x^j + y \sum_{j=m'-1}^{M-1} \tilde{\Psi}_{j,1} x^j + O^M(x,y) \qquad \text{(I-7)}$$

La forme (I-6) sera adoptée dans ce qui suit. En faisant l'hypothèse : n fini et $\Psi_{n0} \neq 0$, les cas particuliers où il existe une courbe de points doubles traversant l'origine sont exclus.

00o00

I-2-2 - Courbes invariantes et propriétés de stabilité

I-2-2-1 - Détermination de certaines courbes invariantes

Les courbes invariantes dans le voisinage de l'origine sont importantes dans l'étude de la stabilité et de la nature de la singularité.

Nous considérons ici les courbes invariantes passant par l'origine définies par les équations paramétriques [2]

$$x = F(t) \ , \quad y = G(t) \qquad (F(0) = G(0) = 0) \qquad \text{(I-8)}$$

où, a priori, F et G sont des séries formelles de puissances entières de t, non nulles simultanément.

Si F et G convergent pour $|t|$ petit, on parlera de courbe analytique invariante.

Si les séries F et G n'ont que des coefficients réels on regardera (I-8) comme une courbe réelle formelle.

Deux courbes du type (I-8) seront considérées identiques si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par un changement de paramètre $t = \ell(\tau)$ où ℓ est une série formelle de puissances entières de τ ou une puissance fractionnaire d'une telle série.

Par définition la courbe (I-8) est dite invariante par rapport à (I-1) si la courbe transformée

$$x = F(t) + G(t) + X(F(t), G(t))$$
$$y = G(t) + Y(F(t), G(t)) \qquad \text{(I-9)}$$

est identique à (I-8). Dans ce cas, il existe la transformation de paramètre $t_1 = \ell(t)$ définie ci-dessus, vérifiant les relations (I-9) lorsque l'on remplace x par $F(t_1)$ et y par $G(t_1)$.

Il est possible de montrer que la série $t_1 = \ell(t)$ commence par un terme linéaire [2], c'est-à-dire $t_1 = \rho^* t + \ldots$ ($\rho^* \neq 0$). Ce résultat permet de conclure que si F et G sont de la forme

$$F(t) = p\, t^{\delta} + \ldots, \quad G(t) = q\, t^{\beta} + \ldots \qquad \text{(I-10)}$$

avec $|p| + |q| \neq 0$ et δ, β entiers, alors $\delta < \beta$. En effet, dans ce cas $F(t_1) = p\, \rho^{*\delta} t^{\delta} + \ldots$ et $G(t_1) = q\, \rho^{*\beta} t^{\beta} + \ldots$ D'après les relations (I-9) où x et y sont respectivement remplacés par $F(t_1)$ et $G(t_1)$ il est possible de constater que l'identité formelle des deux membres de ces relations ne peut se vérifier que lorsque $\beta > \delta$.

Comme il sera vu plus tard, lorsque (I-1) admet des courbes invariantes réelles du type (I-8), certaines sont données par des équations paramétriques de la forme

$$x = F(t) = \pm t^2, \quad y = G(t) = r\, t^{\gamma} + \ldots$$

(γ entier supérieur à 2).

Ces courbes invariantes particulières peuvent aussi s'exprimer sous la forme $y = f(x)$, $f(x)$ étant une série du type :

$$y = f(x) = p_0\, x^{\alpha} + \sum_{i=1}^{\infty} p_i\, x^{\alpha + i/2} \qquad (\alpha > 1) \qquad \text{(I-11)}$$

où α est une fraction positive de dénominateur 2 ou un entier positif et i est entier. (I-11) représente une série à puissances entières de x lorsque α est

entier et $p_i = 0$ pour i impair.

On remarque ici que les coefficients p_i peuvent prendre des valeurs imaginaires même si F et G sont réels.

Une courbe $y = f(x)$ invariante par rapport à (I-1), satisfait l'équation fonctionnelle $f(x_1) = y_1$, soit

$$f(x + f(x) + X(x, f(x)) = f(x) + Y(x, f(x)) \qquad \text{(I-12)}$$

Considérant la forme réduite (I-6) de la récurrence (I-1) on voit que les termes non linéaires de plus bas degré, indépendants de y dans les expressions de x_1 et y_1 sont respectivement $\varphi_{m0} x^m$ et $\psi_{m0} x^n$. Selon les valeurs de m et n la résolution de (I-12) mène a trois cas possibles (voir détails dans l'Annexe A 1) :

- Cas A ($n < 2m - 1$) :

$$\alpha = (n + 1)/2 \quad , \quad p_0^2 = 2\,\psi_{n0} / (n + 1) \qquad \text{(I-13)}$$

- Cas B ($n = 2m - 1$) :

$$\alpha = m \quad , \quad p_0 = (-\varphi_{m0} \pm \sqrt{\varphi^2_{m0} + 4\,\psi_{n0}/m})/2 \qquad \text{(I-14)}$$

- Cas C ($n > 2m - 1$) :

$$\alpha = n - m + 1 \quad \text{avec} \quad p_0 = \psi_{n0}/(\varphi_{m0}(m+n-1))$$
$$\text{ou} \qquad \alpha = m \quad \text{avec} \quad p_0 = -\varphi_{m0} \qquad \text{(I-15)}$$

Les coefficients p_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) peuvent être déterminés à partir des coefficients de (I-1) et des p_j ($j < i$). Cependant, dans le cas B, il faut que l'inégalité

$$(2m + q)\,p_0 \neq -(m+q)\,\varphi_{m0} \quad (q > 0, \text{entier}) \qquad \text{(I-16)}$$

soit satisfaite (voir Remarque 2 ci-dessous).

Dans l'Annexe A 1 on constate que si p_0 est réel les p_i

(i = 1, 2, 3, ...) sont aussi réels, et, sauf dans le cas A avec n pair , ils s'annulent pour i impair (f (x) est donc une série de puissances entières de x).

I-2-2-2 - Existence de courbes invariantes réelles

L'existence de courbes invariantes réelles est ici examinée dans les différents cas A, B et C.

Considérons tout d'abord les courbes correspondant à une représentation du type (I-11)

Cas A : $n < 2m - 1$

Si n est pair les expressions (I-13) correspondent à deux courbes réelles. En effet, ceci est évident si Ψ_{n0} est positif. Pour éviter la considération de coefficients imaginaires dans (I-11) lorsque Ψ_{n0} est négatif il suffit d'effectuer dans (I-1) (ou (I-6)) la substitution

$$x \longrightarrow -x \quad , \quad y \longrightarrow -y$$

Si par contre n est impair (I-13) ne définira des courbes réelles que lorsque Ψ_{n0} sera positif puisque dans ce cas, (I-11) est une série de puissances entières de x. Une telle série ne représente une courbe réelle que lorsque tous ses coefficients sont aussi réels.

Donc, dans le cas A si n est pair, ou s'il est impair avec $\Psi_{n0} > 0$, alors il existe deux courbes invariantes données par les deux déterminations de p_0.

Cas B : $n = 2m - 1$

D'après les relations (I-14) α est ici toujours entier et comme pour le cas A avec n impair, il faut que tous les coefficients de (I-11) soient réels pour que cette série représente une courbe réelle. Le coefficient p_1 ainsi que les p_i (i = 1, 2, 3, ...) seront réels si la condition suivante est

vérifiée :

$$\varphi^2_{m0} + 4\Psi_{n0}/m \geqslant 0 \qquad \text{(I-17)}$$

Dans ce cas à chaque détermination de p_0 il correspond une courbe invariante réelle (voir Remarque 1 ci-dessous).

Cas C : $n > 2m - 1$

Comme ici α a deux déterminations entières et p_0 a deux déterminations réelles, les relations (I-15) définissent toujours deux courbes invariantes réelles.

Ces conditions d'existence de courbes invariantes réelles sont encore valables lorsqu'on considère des courbes de la forme générale (I-8).

La convergence de (I-11) pour $|x| < \delta$, avec δ positif et suffisamment petit, dans le cas réel, est une conséquence des résultats de Diamond [25] . Par conséquence les courbes réelles qui viennent d'être considérées dans les trois cas possibles sont aussi analytiques.

Remarque 1 :

Dans le cas B, supposant vérifiées les inégalités (I-16) et (I-17), il existe deux courbes réelles définies par (I-14) à moins que

$$\varphi^2_{m0} + 4\Psi_{n0}/m = 0 \qquad (\Psi_{n0} < 0)$$

auquel cas une seule courbe réelle sera définie.

Remarque 2 :

Si (I-16) n'est pas vérifiée, alors il existe un certain entier $q > 0$ tel que :

$$(2\alpha + q)\, p_0 = -(\alpha + q)\, \varphi_{m0} \qquad (1)$$

En utilisant les relations (I-14) deux expressions pour q sont obtenues :

$$q_1 = -2m\sqrt{\Delta}\ /(\varphi_{m0}+\sqrt{\Delta}),\ q_2 = 2m\sqrt{\Delta}/(\varphi_{m0}-\sqrt{\Delta}) \qquad (2)$$

($\Delta = \varphi^2_{m0} + 4\Psi_{n0}/m \geqslant 0$)
qui correspondent à chacune des deux déterminations de p_0.
Si $\Psi_{n0} > 0$ alors $\Delta > \varphi^2_{m0}$ et par conséquent q_1 et q_2 sont négatifs et l'inégalité (I-16) est forcément vérifiée.
Si $\Psi_{n0} < 0$ alors $q_1 \cdot q_2 = \Delta / \Psi_{n0}\, m^3 \leq 0$. Ceci montre que dans ce cas un des q est négatif ou alors $q_1 = q_2 = \Delta = 0$.

Ces considérations permettent de conclure que :

a) si $\Psi_{n0} > 0$ les deux courbes correspondantes à (I-14) sont analytiques

b) si $\Psi_{n0} < 0$ une au moins de ces deux courbes est analytique.

I-2-2-3 - Quelques critères d'instabilité de l'origine pour la récurrence (I-1)

Sur les figures I-1, I-2 et I-3 sont réunis les types de singularités possibles dans les cas A, B et C, lorsqu'il existe des courbes invariantes réelles du type (I-8). Les singularités pouvant se ramener aux précédentes par la substitution $x \longrightarrow -x$, $y \longrightarrow -y$ n'y figurent pas.

Chaque courbe invariante peut être divisée en deux branches invariantes : $x > 0$ et $x < 0$ sauf si elle n'est pas définie pour x positif ou x négatif (cas A, n pair).

Si un point, sur une branche et dans un voisinage suffisamment petit de $\mathcal{O}$, tend vers $\mathcal{O}$ par itération successive de (I-1) alors on parlera de courbe invariante Ω et si au contraire il s'en éloigne, de courbe invariante α. Sur les figures I-1 à I-3 le sens de la flèche indique si la branche correspondante est de type Ω ou α ;

La détermination de l'orientation des diverses branches est faite en remarquant que d'après (I-6), sur les courbes invariantes $y = f(x)$, la différence

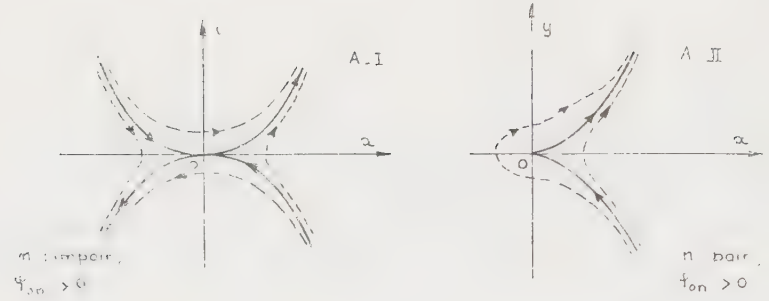


Figure I-1 : Singularités dans le cas A :

———— Courbes invariantes

- - - - - - Allure des trajectoires discrètes.

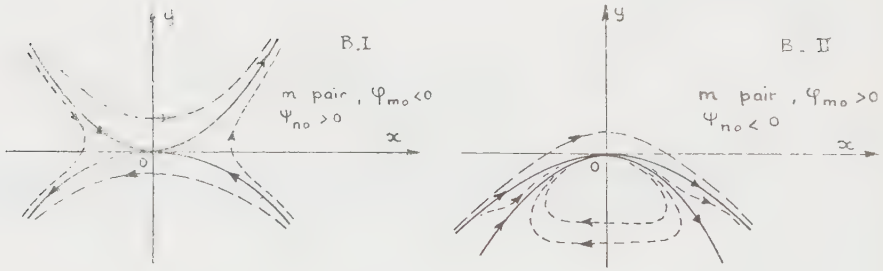


Figure I-2 : Singularités dans le cas B $\left(\varphi_{mo}^2 + \frac{4\psi_{no}}{m} > 0\right)$

———— Courbes invariantes

- - - - - Allure des trajectoires discrètes

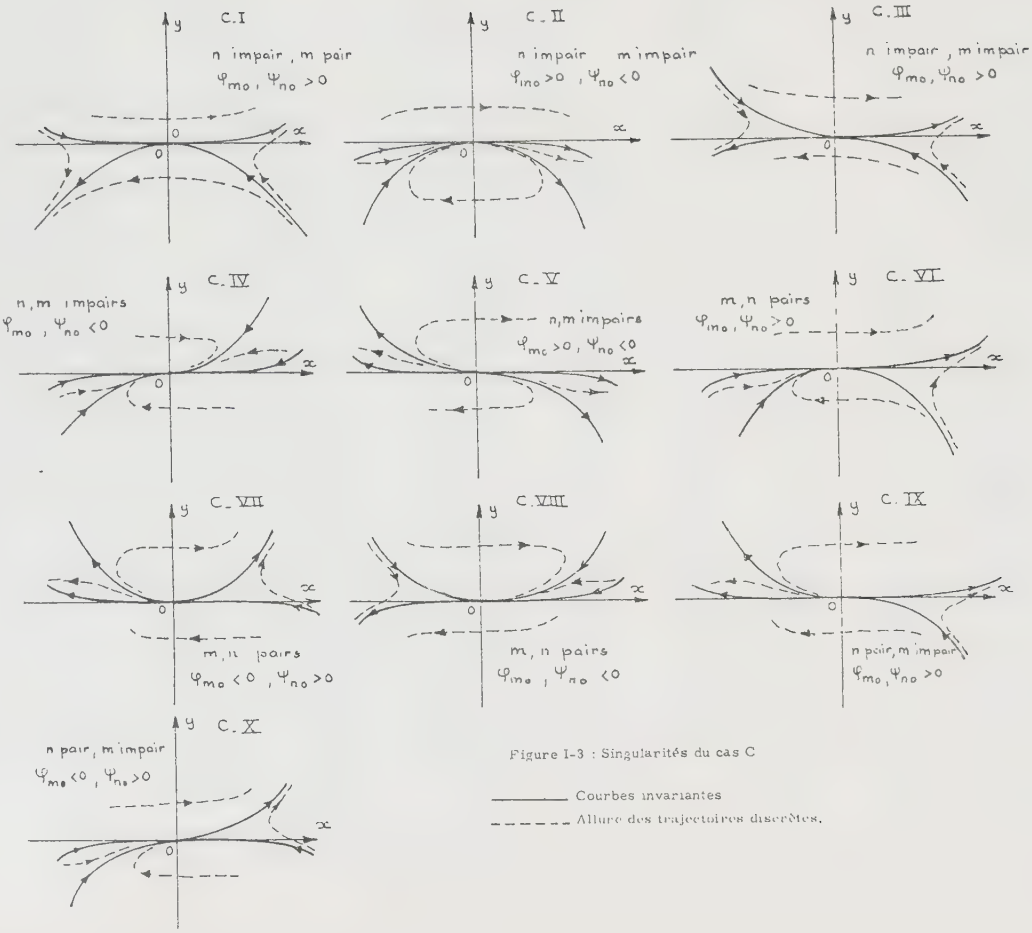


Figure I-3 : Singularités du cas C

——— Courbes invariantes

- - - - - - Allure des trajectoires discrètes.

$$y_1 - y = \Psi_{n0} x^n + O^n(x)$$

est de même signe que $\Psi_{n0} x^n$, si $|x|$ est suffisamment petit. Par exemple, pour le cas $n < 2m-1$, $\Psi_{n0} > 0$, n pair. la courbe $y = \sqrt{2\Psi_{n0}/(n+1)}\, x^{n+1/2} + \ldots$ est invariante de type α et $y = -\sqrt{2\Psi_{n0}/(n+1)}\, x^{n+1/2} + \ldots$ est invariante de type Ω (voir fig. I-1)

Ce raisonnement peut être généralisé pour les autres cas. Soit la courbe invariante

$$y = p_0 x^{\alpha} + \ldots$$

et soit la fonction C (x) définie par

$$C(x) = \Psi_{n0} p_0 x^{n+\alpha} \qquad \text{(I-18)}$$

Alors pour $x > 0$ $(x < 0)$:

a) - si $C(x) > 0$, la branche correspondante à $x > 0$ $(x < 0)$ est du type α

b) - si $C(x) < 0$ la même branche est du type Ω

A partir des relations (I-13) - (I-15) et du signe de C (x) dans chaque cas, il est possible de dériver des conditions d'existence de courbes invariantes α. Or, l'existence de ces courbes implique l'instabilité de l'origine donc ces conditions sont aussi des critères d'instabilité de l'origine.

CRITERES D'INSTABILITE

L'origine O du plan x, y est un point fixe instable pour (I-1) si l'une des conditions ci-dessous est vérifiée par sa forme réduite (I-6) :

a) n pair

b) n impair, $\Psi_{n0} > 0$

c) n impair, m pair, $\Psi_{n0} < 0$, $n > 2m-1$

d) n impair, m impair, $\Psi_{n0} < 0$, $\varphi_{m0} > 0$, $n > 2m - 1$

e) $n = 2m + 1$ (impair), $\Psi_{n0} < 0$, $\varphi_{m0} > 0$, $\varphi^2_{m0} + 4\Psi_{n0}/m \geq 0$

Les cas restants sont essentiellement de deux types :

- Les cas où il n'y a pas de courbes invariantes réelles du type

- Les cas où les courbes invariantes réelles du type (I-11) n'ont que des branches Ω.

Une partie de ces cas est traitée dans la section suivante à l'aide de la méthode directe de Lyapunov (ou deuxième méthode [13]).

I-2-3 - Etude de la stabilité à l'aide de la méthode directe de Lyapunov

Tout d'abord seront présentés ici, certains résultats théoriques concernant les récurrences autonomes du second ordre et leurs équations différentielles associées. Les travaux de G.D. Birkhoff [2] sur les transformations ponctuelles représentent une partie importante dans ce qui suit.

Bien que ces résultats soient applicables à des récurrences plus générales que celles du type (I-1) ils ne seront ici considérés que pour ce cas particulier.

La méthode directe (ou 2ème méthode) de Lyapunov permettra de mettre en évidence des critères de stabilité (ou instabilité) pour certains cas qui ne vérifient pas les conditions a) - e) de la section I-2-2-3.

I-2-3-1 - Equations différentielles associées à la récurrence (I-1)

Soit la transformation T définie par (I-1). le k-ième conséquent (x_k, y_k) d'un point (x, y), par itération successive de T peut s'exprimer par [2] :

$$\begin{cases} x_k = x + ky + \sum_{i+j=2}^{\infty} \varphi_{ij}^{(k)} x^i y^j \\ y_k = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \psi_{ij}^{(k)} x^i y^j \quad . \end{cases} \qquad (k, \text{ entier}) \qquad \text{(I-19)}$$

Nous pouvons trouver les expressions des coefficients $\varphi_{ij}^{(k)}$ et $\psi_{ij}^{(k)}$ (coefficients qui sont des fonctions de k) à l'aide des relations

$$\left[\begin{array}{l} x_{k+1} = x + (k+1)\, y + \displaystyle\sum_{i+j=2}^{\infty} \varphi_{ij}^{(k+1)}\, x^i\, y^j \\ y_{k+1} = y + \displaystyle\sum_{i+j=2}^{\infty} \psi_{ij}^{(k+1)}\, x^i\, y^j \end{array}\right. \qquad \text{(I-20)}$$

et

$$\left[\begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + y_k + \displaystyle\sum_{i+j=2}^{\infty} \varphi_{ij}\, x_k^i\, y_k^j \\ y_{k+1} = y_k + \displaystyle\sum_{i+j=2}^{\infty} \psi_{ij}\, x_k^i\, y_k^y \end{array}\right. \qquad \text{(I-21)}$$

où x_k et y_k sont donnés par (I-19) et les coefficients φ_{ij}, ψ_{ij} sont donnés par (I-3). Par identification des seconds membres de (I-20) et (I-21) nous obtenons pour chaque $\varphi_{ij}^{(k)}$ et $\psi_{ij}^{(k)}$ une équation aux différences, linéaire et du premier ordre de la forme :

$$\varphi_{ij}^{(k+1)} - \varphi_{ij}^{(k)} = P_{ij}(k)$$

ou (I-22)

$$\psi_{ij}^{(k+1)} - \psi_{ij}^{(k)} = Q_{ij}(k)$$

P_{ij} et Q_{ij} sont des fonctions de k trouvées à partir des fonctions $\varphi_{r,s}^{(k)}$ et $\psi_{r,s}^{(k)}$ $(r + s < i + j)$. Les coefficients de (I-19) sont alors calculés par induction.

Si on impose les conditions initiales

$$\varphi_{ij}^{(0)} = \psi_{ij}^{(0)} = 0 \qquad (i + j \geq 2)$$

ces coefficients $\varphi_{ij}^{(k)}$ et $\psi_{ij}^{(k)}$ sont obtenus de façon unique. Ils seront des polynomes en k.

Dans l'article [14] de G. D. Birkhoff se trouve (pages 11-15) démontrée, sous forme plus générale, la proposition suivante :

Proposition I-1 :

Les séries formelles (I-19) satisfont le système différentiel formel

$$\frac{dx_k}{dk} = U(x_k, y_k) \quad , \quad \frac{dy_k}{dk} = V(x_k, y_k) \qquad (k \text{ réel}) \qquad (I\text{-}23)$$

avec les conditions initiales $x_0 = x$ et $y_0 = y$, les séries U et V étant définies par les relations :

$$U(x, y) = \left.\frac{\partial x_k}{\partial k}\right|_{k=0} \quad , \quad V(x, y) = \left.\frac{\partial y_k}{\partial k}\right|_{k=0} \qquad (I\text{-}24)$$

qui sont donc de la forme :

$$\begin{cases} U(x,y) = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} U_{ij}\, x^i\, y^j \\ V(x,y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} V_{ij}\, x^i\, y^j \end{cases} \qquad (I\text{-}25)$$

La proposition I-2 qui suit est une conséquence d'un résultat plus général démontré au chapitre II (p. 80 , Proposition II-1).

Proposition I-2 :

"Il est possible de définir un système différentiel à coefficients périodiques de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \sum_{i+j=2}^{L} U_{ij}\, x^i\, y^j + E_1(x, y; t) \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i+j=2}^{L} V_{ij}\, x^i\, y^j + E_2(x, y; t) \end{aligned} \qquad (I\text{-}26)$$

où U_{ij} et V_{ij} sont des [illegible] E_1 et E_2 sont des fonctions périodiques en t, de période 1, ayant toutes leurs dérivées partielles continues (classe C^∞) ; L est un entier positif, pouvant être choisi arbitrairement grand et $E_1, E_2 \sim O^L(\rho)$, $\rho = x^2 + y^2$, soit :

$\lim_{\rho \to 0} |E_1| / \rho^L = \lim_{\rho \to 0} |E_2| / \rho^L = 0$ pour chaque valeur de t]

tel que, si $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ étant un voisinage suffisamment petit de l'origine (O) et si p (t ; x_0, y_0) et q (t ; x_0, y_0) représentent la solution de (I-26) passant par x_0, y_0 à l'instant t = 0, alors la transformation ponctuelle $(x_0, y_0) \to (x_1, y_1)$ définie par

$$x_1 = p\,(1; x_0, y_0) \quad , \quad y_1 = q\,(1 ; x_0, y_0)$$

est identique à la transformation T donnée par (I-1) . Dans ce sens le système différentiel (I-26) sera dit "associé" à la récurrence (I-1)."

Si les itérés successifs (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_K, y_K) de (x_0, y_0), appartiennent tous à $\mathcal{D}$ alors on peut écrire pour $k \leq K$:

$$x_k = p\,(k ; x_0, y_0) \quad , \quad y_k = q\,(k ; x_0, y_0)$$

Ceci permet de démontrer la Proposition I-3.

Proposition I-3 :

Si le mouvement x = y = 0 du système (I-26) est asymptotiquement stable ou instable, alors le point fixe x = y = 0 de (I-1) est aussi asymptotiquement stable ou instable, respectivement.

Remarque 1 :

On représentera parfois soit E_1, soit E_2 par le symbole O^L (x, y ; t).

D'une façon générale un tel symbole représentera une fonction arbitraire E (x, y, t) telle que :

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|E\,(x, y, t)|}{\rho^L} = 0 \qquad (\rho^2 = x^2 + y^2)$$

uniformément par rapport à t.

I-2-3-2 - Système différentiel formel associé à la récurrence (I-6) lorsque $m \leq n$, $\varphi_{m0} \neq 0$ et $\psi_{n0} \neq 0$.

Le système différentiel formel associé à (I-6) sera dans ce cas de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{i+j=m}^{\infty} C_{ij}\, x^i y^j$$
$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=n}^{\infty} D_{ij}\, x^i y^j \qquad \text{(I-27)}$$

Dans l'Annexe A 2 nous avons calculé certains des coefficients C_{ij} et D_{ij}, nécessaires pour notre étude. Deux cas sont à considérer :

a) si $m = n$

$$C_{n0} = \varphi_{n0} - \frac{\psi_{n0}}{2}\ ,\ D_{n0} = \psi_{n0},\ D_{n-1,1} = -\frac{\psi_{n0}}{2}\, n \qquad \text{(I-28)}$$

b) si $m < n$

$$C_{m0} = \varphi_{m0}\ ,\ D_{n0} = \psi_{n0} \qquad \text{(I-29)}$$

De façon tout à fait analogue à celle utilisée dans la section I-2-1, il est possible de trouver un changement de variables topologique autour de l'origine, du type :

$$x = \xi + \sum_{i+j=m}^{L} \alpha_{ij}\, \xi^i \eta^j\ ,\ y = \eta + \sum_{i+j=n}^{L} \beta_{ij}\, \xi^i \eta^j \qquad \text{(I-30)}$$
$$(L > n)$$

tel qu'avec les nouvelles variables ξ et η le système (I-27) soit ramené à la forme

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta + \sum_{i=m}^{L} a_i\, \xi^i + \varepsilon_1(\xi, \eta)$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \sum_{i=m}^{L} b_i\, \xi^i + c\, \eta^n + \varepsilon_2(\xi, \eta) \qquad \text{(I-31)}$$

$\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ étant des séries formelles avec des termes de degré supérieur à L ; a_i, b_i et c étant des constantes. Pour une valeur arbitraire de c il est toujours possible de trouver α_{ij} et β_{ij} de façon à arriver à la forme (I-31) Les constantes a_m et b_n sont indépendantes de la valeur choisie pour c. Les relations (I-28) et (I-29) permettent d'écrire les expressions suivantes :

$$m = n : a_n = \varphi_{n0} - \psi_{n0} \ , \ b_n = \psi_{n0} \qquad \text{(I-32)}$$

$$m < n : a_m = \varphi_{m0} \ , \ b_n = \psi_{n0} \qquad \text{(I-33)}$$

En effet, il est facilement vérifié que dans le premier cas :

$$a_n = C_{n0} + D_{n-1,1}/n \ , \ b_n = D_{n0}$$

et dans le second cas

$$a_m = C_{m0} \ , \ b_n = D_{n0}$$

I-2-3-3 - Système d'équations différentielles à coefficients périodiques associé à (I-6) lorsque $m \leq n$, $\varphi_{m0} \neq 0$ $\psi_{n0} \neq 0$

D'après la Proposition I-2 de la section I-2-3-1 il existe un système différentiel à coefficients périodiques de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{i+j=m}^{L} C_{ij} x^i y^j + O^L(x, y ; t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=n}^{L} D_{ij} x^i y^j + O^L(x, y ; t) \qquad \text{(I-34)}$$

(voir remarque 1 - I-2-3-1)

associé à (I-1) ($m \leq n$), au sens précisé dans la même Proposition (p. 31) Les coefficients C_{ij} et D_{ij} ($i + j \leq L$) sont les mêmes que ceux du système différentiel formel (I-27). Il est donc clair que le changement de variables (I-30) -ramenant (I-27) à la forme (I-31)- effectué sur (I-34), donnera le nouveau système ($m \leq n$) :

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta + \sum_{i=m}^{L} a_i \xi^i + O^L(\eta, \xi ; t)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \sum_{i=n}^{L} b_i \xi^i + c\,\eta^n + O^L(\eta, \xi ; t) \qquad \text{(I-35)}$$

I-2-3-4 - Etude de la stabilité du système différentiel associé, par la méthode directe de Lyapunov

Supposant L, dans le système (I-35), donné par :

$$L = m + n - 1 \qquad \text{(I-36)}$$

on définit alors une fonction de Lyapunov par l'expression [29] :

$$V(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{2} - \sum_{i=n}^{L} b_i \frac{\xi^{i+1}}{i+1} \qquad \text{(I-37)}$$

V est une fonction définie positive si n est impair et b_n (= Ψ_{n0}) < 0.

Calculons la dérivée de V (ξ, η) par rapport à t utilisant le système (I-35) :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt} =$$

$$= \left(-\sum_{i=n}^{L} b_i \xi^i\right)\left(\eta + \sum_{i=m}^{L} a_i \xi^i + O^L(\eta, \xi ; t)\right) +$$

$$+ \eta\left(\sum_{i=n}^{L} b_i \xi^i + c\,\eta^n + O^L(\eta, \xi ; t)\right) =$$

$$= c\,\eta^{n+1} - b_n a_m \xi^{m+n} + O^{m+n}(\eta, \xi ; t)$$

Deux cas sont à considérér :

I) $a_m > 0$; $b_n < 0$; m, n impairs.

Dans ce cas, choisissant (I-30) de façon à avoir $c > 0$, la fonction dV/dt sera définie positive et par conséquent le mouvement non perturbé sera instable.

II) $a_m < 0$; $b_n < 0$; m, n impairs

Ici, (I-30) est choisi tel que $c < 0$. Alors, dV/dt est définie négative et le mouvement non perturbé sera asymptotiquement stable.

Ces résultats peuvent être appliqués à la récurrence (I-6) à l'aide des relations (I-32) et (I-33), en tenant compte de la Proposition I-3 de I-2-2-1. Considérant la forme réduite (I-6) de (I-1) on peut formuler les critères de stabilité ou d'instabilité suivants :

- Le point fixe (0, 0) sera asymptotiquement stable si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) $m = n$; n impair ; $\Psi_{n0} < 0$; $\varphi_{n0} < \Psi_{n0}$

2) $m < n$; n, m impairs ; $\Psi_{n0} < 0$; $\varphi_{m0} < 0$

- Le point fixe (0, 0) sera instable si l'on a :

3) $m = n$; n impair ; $\Psi_{n0} < 0$; $\varphi_{n0} > \Psi_{n0}$

4) $m < n$; n, m impairs ; $\Psi_{n0} < 0$; $\varphi_{m0} > 0$

5) $m > n$; n impair ; $\Psi_{n0} < 0$

On remarque que le point fixe $x = y = 0$ est comparable à un point singulier du type foyer lorsqu'il n'y a pas de courbes invariantes réelles du type (I-8) (voir figure I-6). Si ces courbes existent, dans les cas que nous venons de considérer, la singularité sera une sorte de noeud stable ou instable (voir figure I-4).

Nous avons donc des "foyers" si :

- on est dans le cas (1) ("foyer" stable) ou (3) ("foyer" instable), ou si :

- on est dans le cas (2) ("foyer" stable) ou (4) ("foyer" instable) et de plus on a $n = 2m - 1$; $\varphi_{m0}^2 + \frac{4\psi_{n0}}{m} < 0$

Les cas (2) et (4), non inclus ci-dessus, correspondent à des "noeuds".

I-2-4 - Etude de la stabilité du point fixe $x = y = 0$ de la récurrence (I-1) à l'aide de certaines fonctions transcendantes définies par Lyapunov

Sont considérés ici parmi les cas restants, ceux dont la stabilité de l'origine ne dépend que des coefficients des séries (I-3), correspondants aux termes de degré non supérieur à un certain entier M. Ces cas seront dits "algébriques" par opposition aux cas dits "transcendants", où la stabilité dépend de tous les coefficients de ces séries. Cette terminologie est adoptée par analogie aux cas traités par Lyapunov dans [14] où l'on trouve une étude de la stabilité du mouvement non perturbé $x = y = 0$ d'un système différentiel du type :

$$\frac{dx}{dt} = y + \mathcal{X}(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \mathcal{Y}(x, y) \qquad (I\text{-}38)$$

et une généralisation à certains systèmes d'ordre plus élevé dont la matrice de la partie linéaire est caractérisée par deux valeurs propres nulles de multiplicité deux (comme précédemment), tous les autres ayant des parties réelles négatives.

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des fonctions analytiques de x et y, ne contenant que des termes de degré non inférieur à deux.

Remarque : Un exemple très simple d'un cas "transcendant" est le suivant :

$$x_1 = x + y + x^3$$
$$y_1 = y - x^3$$

Il s'agit d'un cas conservatif [2] à Jacobien fonctionnel unitaire du type elliptique (au sens de Birkhoff).

Dans ce qui suit, un rappel des résultats de Lyapunov est tout d'abord présenté, après quoi l'analyse est divisée en deux parties :

a) Extension des résultats de Lyapunov pour les systèmes du type (I-38), aux systèmes du type

$$\frac{dx}{dt} = y + \mathcal{X}(x,\ y) + O^{L}(x,\ y\ ;\ t)$$
$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{Y}(x,\ y) + O^{L}(x,\ y\ ;\ t) \qquad \text{(I-39)}$$

où $O^{L}(x,\ y\ ;t)$ représente ici, des fonctions périodiques en t de période 1, appartenant à la classe C^{i}, i arbitrairement grand et ayant la propriété de la Remarque 1 de I-2-3-1.

b) Application aux cas "algébriques" de la récurrence (I-1), non traités auparavant, à l'aide des Propositions I-1, I-2, I-3 de la section I-2-3-1.

I-2-4-1 - Rappel des résultats de Lyapunov

Considérons un système du type (I-38). Il est aisé de voir que par la substitution $y + \mathcal{X} = \bar{y} + \overline{\mathcal{X}}(x,\ \bar{y})$, $\mathcal{X}(x,\ \bar{y})$ étant une fonction analytique quelconque de degré supérieur à 1, ce système prendra la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \bar{y} + \overline{\mathcal{X}}(x,\ \bar{y}) \quad , \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \overline{\mathcal{Y}}(x,\ \bar{y}) \qquad \text{(I-40)}$$

Le problème de stabilité est équivalent pour les deux systèmes.

Supposons maintenant que $\overline{\mathcal{X}}(x,\ 0) \equiv 0$. Dans cette hypothèse développant $\overline{\mathcal{Y}}$ en série de puissances de $\bar{y}$ on obtient : $\overline{\mathcal{Y}} = f(x) + \bar{y}\,\varphi(x) + \ldots$ Si f (x) n'est pas identiquement nul, il est possible de l'écrire comme une série de la forme :

$$f(x) = A\,x^{\alpha} + A_1\,x^{\alpha+1} + \ldots \qquad \text{(I-41)}$$

avec $A \neq 0$ et $\alpha \geqslant 2$. De la même manière $\varphi(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = B\,x^{\beta} + B_1\,x^{\beta+1} + \ldots \qquad \text{(I-42)}$$

avec $B \neq 0$ et $\beta \geq 1$, sauf si $\varphi(x) \equiv 0$.

Seront considérés ici les cas où α est impair, $A < 0$ et tels que si on écrit $\alpha = 2\ell - 1$ alors

(I) $\beta > \ell - 1$ ou

(II) $\beta = \ell - 1$ avec $B^2 + 4\ell A < 0$

Sans perte de généralité on peut encore supposer $A = -1$ (ceci peut s'obtenir par un changement linéaire de variables). Définissons ensuite les fonctions transcendantes $Cs\,\theta$ et $Sn\,\theta$ par les relations :

$$\frac{d\,Cs}{d\theta} = -\,Sn\,\theta \quad , \quad \frac{d\,Sn}{d\theta} = Cs^{2\ell-1}\,\theta \qquad \text{(I-43)}$$

$$Cs\,0 = 1 \quad , \quad Sn\,0 = 0 \qquad \text{(I-44)}$$

Ces fonctions vérifient l'égalité :

$$Cs^{2\,l}\,\theta + 1\,Sn^2\,\theta = 1 \qquad \text{(I-45)}$$

et sont périodiques en θ de période 2ω :

$$2\omega = 2\sqrt{\pi/\ell}\;\frac{\Gamma(1/2l)}{\Gamma(1+1)/2l}$$

Γ étant la fonction Γ classique (ou fonction factorielle).

D'autres propriétés peuvent êtretrouvées dans [14] . Avec ces définitions et en supposant que $\beta > \ell - 1$ (cas I), le changement de variables

$$x = r\,Cs\,\theta \quad , \quad y_1 = -\,r^{\ell}\,Sn\,\theta \qquad \text{(I-46)}$$

transforme (I-40) en

$$\frac{dr}{dt} = r^{\ell+1} \quad R$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = r^{\ell-1} + r^{\ell} \quad \Theta \qquad \text{(I-47)}$$

où R et Θ sont des séries de puissances entières de r à coefficients périodiques par rapport à ϑ. Ces coefficients sont des fonctions rationnelles entières de $C_s \vartheta$ et $S_n \vartheta$ et par conséquent, définies et continues pour toute valeur réelle de l'argument. R et Θ convergent uniformément pour r suffisamment petit [14] .

Il est possible de considérer sans perte de généralité $r > 0$ (voir [14] p. 149). Si alors, r est suffisamment petit, ϑ peut remplacer la variable de temps t, dans le problème de stabilité conditionnelle de (I-47) et ce problème est ainsi réduit au problème de stabilité relatif à l'équation

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2 R}{1 + \Theta r} \qquad \text{(I-48)}$$

Le second membre est représenté par une série du type :

$$R_2 r^2 + R_3 r^3 + \ldots$$

uniformément convergente pour r suffisamment petit, les coefficients R_2, R_3,... étant du même type que ceux de R ou Θ .

Le problème de stabilité de (I-48) est traité de la façon suivante [13 - 14] :

Soit une fonction r, satisfaisant (I-48), définie sous forme d'une série

$$r = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \ldots$$

de puissances entières de la constante arbitraire c, où u_2, u_3, ... sont des fonctions de ϑ, indépendantes de c obtenues par identification et donc par les équations $(du_2/d\vartheta) = R_2$, $(du_3/d\vartheta) = R_3 + 2 u_2 R_2$, ..., d'une façon

unique si on impose pour $\vartheta = 0$:

$$u_2 = u_3 = \ldots\ldots = 0$$

(Ceci n'est pas essentiel).

Supposons alors que dans la suite

$$u_2, u_3, u_4, \ldots \qquad \text{(I-49)}$$

la première fonction non périodique soit u_N. Celle-ci est de la forme $u_N = g\vartheta + v$ ($g \neq 0$; v périodique en ϑ). En tenant compte de la condition $r > 0$, nous pouvons affirmer que si $g > 0$, le mouvement non perturbé est instable. Inversement si $g < 0$, il est asymptotiquement stable.

Le cas II est traité de la même façon, à l'aide d'un changement de variables (voir [14] p. 160) du type

$$r = \bar{r} \cdot \exp\left[\int_0^{\vartheta} R_1(\theta)\, d\theta\right]$$

$R_1(\vartheta)$ étant une fonction périodique en ϑ.

I-2-4-2 - Extension des résultats de la section précédente au cas d'un système du type (I-39)

On considère ici le problème de stabilité du système (I-39).

Il sera montré par la suite que si $L \geq N + 2\,1 - 2$ (u_N étant la première fonction non périodique de la suite (I-49)), alors le mouvement non perturbé du système (I-39) sera instable si $g < 0$ ou asymptotiquement stable si $g > 0$, tout comme pour le système (I-38).

Supposons déjà effectué sur le système (I-39) le changement de variables qui ramène (I-38) à la forme (I-40). Dans ce cas $\mathcal{X}(x, 0) \equiv 0$.

Comme dans la section I-2-4-1 nous définissons ensuite la substitution $(x, y) \longrightarrow (r, \vartheta)$ par

$$x = r\,Cs\vartheta \quad , \quad y = -r^{\ell}\,Sn\vartheta$$

Si on se place dans le cas où $\beta < \ell - 1$ ($A = -1$), le système (I-39) devient un système du type

$$\frac{dr}{dt} = r^{\ell+1} (R(r, \theta) + E_r(r, \theta, t))$$
$$\frac{d\theta}{dt} = r^{\ell-1} (1 + r\,\Theta(r, \theta) + r\,E_\theta(r, \theta, t)) \qquad \text{(I-50)}$$

où R et Θ sont des fonctions déjà définies auparavant pour le système (I-31) ; E_r, E_θ sont périodiques en θ et t, définies pour r suffisamment petit, de classe C^i (i arbitrairement grand) et de plus, pour tout θ et t réels, elles vérifient les relations :

$$\lim_{r \to 0} \frac{|E_r|}{r^{L-2\ell}} = 0 \quad , \quad \lim_{r \to 0} \frac{|E_\theta|}{r^{L-2\ell}} = 0$$

De la même manière que pour le système (I-47) on peut considérer θ comme variable de temps, lorsque r est suffisamment petit. Il est encore possible de supposer $r > 0$, sans perte de généralité.

A partir des équations (I-50), nous formons le système :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 R}{1 + r\Theta} + r^2 \mu_r(r, \theta, t)$$
$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{(1 + r\Theta + r E_\theta(r, \theta, t)) r^{\ell-1}} \qquad \text{(I-51)}$$

où les propriétés de μ_r sont les mêmes que celles de E_r et E_θ signalées ci-dessus.

En supposant $L \geq N + 2\ell - 2$, il est alors possible de trouver un certain $\rho_0 > 0$, tel que pour un certain $\varepsilon_0 > 0$, arbitrairement petit, la relation

$$|\mu_r| < \varepsilon_0 r^N \qquad \text{(I-52)}$$

soit vérifiée pour $0 < r < \rho_0$ et pour tout θ et t réels.

Définissons les deux équations différentielles :

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \frac{\hat{r}^2 R}{1 + \hat{r}^{N+2}} - \varepsilon \hat{r}^{N+2} \qquad (I-53)$$

et

$$\frac{d\check{r}}{d\theta} = \frac{\check{r}^2 R}{1 + \check{r}^{N+2}} - \varepsilon \check{r}^{N+2} \qquad (I-54)$$

Soient $\hat{r} = \hat{\varphi}(\theta, r_0, \theta_0)$ et $\check{r} = \check{\varphi}(\theta; r_0, \theta_0)$ les solutions de (I-53) et (I-54) respectivement, avec les conditions initiales :

$$\check{r} = \hat{r} = r_0 > 0 \quad ; \quad \theta = \theta_0$$

et soit $r = \varphi(\theta; r_0, t_0)$, $t = \tau(\theta; r_0, \theta_0, t_0)$ la solution du système (I-51) avec les conditions initiales

$$r = r_0 \quad , \quad t = t_0 \quad , \quad \theta = \theta_0$$

D'après la relation (I-52) on peut facilement montrer que lorsque $\hat{\varphi}$, $\check{\varphi}$ et φ sont inférieurs à ρ_0, alors on a

$$\check{\varphi} \leqslant \varphi \leqslant \hat{\varphi} \qquad (I-55)$$

pour $\theta \geq \theta_0$ et t_0 arbitraire.

Il est donc clair que si le mouvement non perturbé de (I-53) est stable il en sera de même pour le système (I-39) d'autre part si le mouvement non perturbé de (I-54) est instable, celui du système (I-39) sera aussi instable.

Par hypothèse, la première fonction non périodique de la suite (I-49) est u_N. Cette fonction satisfait une équation du type

$$\frac{du_N}{d\theta} = R_N(\theta) + \mathcal{F}(\theta) \qquad (I-56)$$

où $\mathcal{F}(\Theta)$ est une fonction calculée à partir des fonctions $R_2, R_3, \ldots, R_{N-1}$

Supposons que la suite correspondante à (I-49), pour l'équation (I-53) soit

$$\hat{u}_2, \hat{u}_3, \ldots$$

et pour l'équation (I-54)

$$\check{u}_2, \check{u}_3, \ldots$$

Si on choisit ε_0 tel que

$$\varepsilon_0 < |g|$$

il est évident que u_N et u_N seront aussi les premières fonctions non-périodiques des suites correspondantes, et auront pour expression :

$$\hat{u}_N = (g + \varepsilon_0)\ \Theta + v(\Theta)$$
$$\check{u}_N = (g - \varepsilon_0)\ \Theta + v(\Theta)$$

Par conséquent si $g > 0$, on aura l'instabilité pour (I-54) et si $g < 0$ on aura la stabilité asymptotique pour (I-53).

On peut alors affirmer que si $g > 0$ le mouvement non perturbé de (I-39) est instable et si $g < 0$ il sera stable asymptotiquement.

L'analyse du cas $\beta = \ell - 1$ est faite de façon semblable moyennant un changement de variables (voir [14] p. 160).

I-2-4-3 - Application des résultats précédents au problème de stabilité de la récurrence (I-1)

Considérons tout d'abord le système différentiel (I-38) comme étant le système différentiel formel associé à la récurrence (I-1) (voir Proposition I-1 - I-2-2-1). Il est possible de procéder de façon analogue à celle de la section I-2-3-1 en utilisant les règles usuelles d'opérations entre séries formelles et ainsi déterminer les nombres α, β, A, B des expres-

sions correspondant à (I-41) et (I-42). En nous plaçant dans le cas $\beta < \ell - 1$, $A < 0$, à l'aide du changement de variables (I-46) nous obtenons l'équation (I-48) ou R et Θ sont des séries formelles. Les fonctions u_2, u_3,... sont ensuite déterminées.

Supposant u_N comme étant la première fonction non périodique de cette suite, elle sera de la forme :

$$u_N = g\,\Theta + v(\Theta) \qquad \text{(I-57)}$$

avec $g \neq 0$, $v(\Theta)$ étant une fonction périodique de Θ.

D'après les résultats de la section précédente nous pouvons affirmer que

a) si $g > 0$, alors le point fixe $x = y = 0$ de la récurrence (I-1) est instable

b) si $g < 0$, le point fixe sera asymptotiquement stable.

En effet, on peut associer à la récurrence (I-1) (voir Proposition I-2 - I-2-3-1) un système différentiel de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \tilde{\mathcal{X}}(x, y) + O^L(x, y\,;\, t) \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{\mathcal{Y}}(x, y) + O^L(x, y\,;\, t) \end{aligned} \qquad \text{(I-58)}$$

où $\tilde{\mathcal{X}}$ et $\tilde{\mathcal{Y}}$ représentent respectivement les séries $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (formelles), tronquées à partir des termes de degré $L + 1$. Etant donné que u_N est calculé à partir des termes de degré non supérieur à $N + 2\ell - 2$, de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, alors il suffit de prendre $L = N + 2\ell - 2$. D'après les résultats de la section précédente il est possible d'énoncer les critères a) et b) ci-dessus.

Le cas $\beta = \ell - 1$ ne présente pas d'autres difficultés essentielles et peut être étudié de façon semblable.

Considérons maintenant la récurrence (I-1) mise sous forme réduite c'est-à-dire (I-6).

Les relations entre les quantités m, n, φ_{m0}, Ψ_{n0} et les quantités α, β, A, B, seront établies, en se limitant aux cas tels que $m \leq n$.

Dans cette hypothèse le système différentiel formel associé à la récurrence (I-1) peut prendre la forme (I-31). Il est alors possible d'établir les relations :

$$\alpha = n \quad , \quad A = b_n \quad ; \quad \beta = m-1 \quad , \quad B = m\, a_m$$

A partir des expressions (I-32) et (I-33) il est aisé de voir que

I) - le cas $\beta > \ell - 1$, $\alpha = 2\ell - 1$, $A < 0$ correspond à une récurrence du type (I-6) telle que

$$\Psi_{n0} < 0 \quad , \quad n < 2\,m-1 \quad (n \text{ impair}, m \leq n)$$

II) - le cas $\beta = \ell - 1$, $\alpha = 2\ell - 1$, $A < 0$, $B^2 + 4\ell A < 0$, correspond à une récurrence du type (I-6) tel que

$$\Psi_{n0} < 0 \quad , \; n = 2\,m - 1 \quad , \quad \varphi_{m0}^{\,2} + \frac{4\Psi_{n0}}{m} < 0$$

Une partie de ces cas a été étudiée d'une façon différente (méthode directe de Lyapunov) dans la section I-2-3. Les autres cas peuvent (dans le cas algébrique) être traités par la méthode exposée en I-2-4. Ces cas sont les suivants :

i) $m = n$, $\varphi_{n0} = \Psi_{n0}$, $\Psi_{n0} < 0$, n impair

ii) $n = 2\,m-1$, $\varphi_{m0}^{\,2} + \frac{4\Psi_{n0}}{m} < 0$, $\Psi_{n0} < 0$, n impair, m pair

iii) $n < 2m-1$, $m < n$, $\Psi_{n0} < 0$, n impair

I-3 - RESUME DES RESULTATS OBTENUS DANS LE CHAPITRE I, CONCERNANT LA STABILITE DE L'ORIGINE, POUR UNE RECURRENCE DU TYPE (I-1)

Reécrivons cette récurrence :

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + X(x, y) \\ y_1 &= y + Y(x, y) \end{aligned} \qquad \text{(I-1)}$$

Dans la section I-2-1 nous avons défini un changement de variables pour obtenir la forme réduite de (I-1)

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + \varphi_{m0} x^m + \varphi_{m+1,0} x^{m+1} + \ldots \varphi_{M0} x^M + O^M(x,y) \\ y_1 &= y + \psi_{n0} x^n + \psi_{n+1,0} x^{n+1} + \ldots + \psi_{M0} x^M + O^M(x, y) \end{aligned} \qquad \text{(I-6)}$$

$M \geq m, n$

Il était supposé que $\psi_{n0} \neq 0$ (n fini).

Nous énumérons ci-dessous certaines conditions d'instabilité ou de stabilité du point fixe $x = y = 0$ de (I-1) obtenues dans ce chapitre.

Cette énumération est faite sans distinction du type de singularité.

[S] : L'origine sera un point fixe asymptotiquement stable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(S1) n impair, $m = n$, $\varphi_{m0} < \psi_{n0} < 0$

(S2) n impair, m impair, $m < n$, $\psi_{n0} < 0$, $\varphi_{m0} < 0$

(S3) $n = 2m+1$, n impair, $\varphi_{m0} < 0$, $\varphi_{0m}^2 + \frac{4\psi_{n0}}{m} < 0$

I : L'origine sera instable si :

(I1) n pair

(I2) n impair, $\Psi_{n0} > 0$

(I3) n impair, $m = n$, $\varphi_{m0} > \Psi_{n0}$, $\Psi_{n0} < 0$

(I4) m impair, $\varphi_{m0} > 0$, $m \leq n$

(I5) m pair, $n > 2m-1$

(I6) m impair, $n = 2m-1$, $\varphi_{n0}^{\,2} + \frac{4\Psi_{n0}}{m} \geq 0$

(I7) n impair, $m > n$, $\Psi_{n0} < 0$

? Parmi les cas restants, ceux dont la stabilité est définie par des termes de degré non supérieur à un certain entier M (cas algébriques), sont étudiés de la façon suivante :

Cas I : $m = n$, n impair et $\Psi_{n0} = \varphi_{n0} < 0$

Effectuons tout d'abord la substitution

$$x \longrightarrow (-\Psi_{n0})^{-1/n-1} \cdot x$$

$$y \longrightarrow (-\Psi_{n0})^{-1/n-1} \cdot y$$

On obtient ainsi une récurrence du même type, avec $\Psi_{n0} = \varphi_{n0} = -1$. Ensuite on détermine le système différentiel formel associé, du moins jusqu'aux termes d'un certain degré L (> n). Considérons le système différentiel formé des termes de degré non supérieur à L :

$$\frac{dx}{dt} = y + \mathcal{X}(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{Y}(x, y)$$

L'étude d'un tel système est alors faite par la méthode exposée dans la section I-2-4-1. Nous remarquons cependant qu'il n'est pas essentiel que, dans le système (I-40), $\overline{\mathfrak{X}}(x, 0)$ soit identiquement nul. Il suffit que cette expression ne contienne que des termes de degré supérieur à m. En supposant que la première fonction non périodique de la suite (I-49) soit donnée par l'expression :

$$u_N = g\,\vartheta + v(\vartheta),$$

$v(\vartheta)$ étant périodique en ϑ et $g \neq 0$, si de plus $L \geq N + n - 1$, alors le point fixe $x = y = 0$, de (I-1) sera

a) asymptotiquement stable si $g < 0$ et

b) instable, si $g > 0$

Cas II : $n = 2m - 1$, $\Psi_{m0} < 0$, $\varphi_{n0}^2 + \frac{4\Psi_{m0}}{m} < 0$

Dans ce cas on peut procéder de la même façon que précédemment, jusqu'à l'obtention de l'équation différentielle correspondant à (I-48) (p. 42) qui sera alors de la forme

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R_1\, r + R_2\, r^2 + R_3\, r^3 + \ldots \qquad \text{(I-59)}$$

(voir, aussi [14] p. 161).

Si m est impair on peut conclure que si $\varphi_{m0} < 0$ l'origine sera un point fixe stable et si $\varphi_{m0} > 0$ il sera instable (voir conditions (S2) et (I4)). Ce résultat avait été aussi obtenu par des méthodes différentes (Section I-2-3).

Si par contre m est pair, il est possible de montrer que $\int_0^{\vartheta} R_1\, d\theta$ est une fonction périodique en ϑ. Effectuant la substitution $r = \rho \exp\left[\int_0^{\vartheta} R_1(\theta)\, d\theta\right]$ l'équation (I-59) devient :

$$d\rho / d\vartheta = P_2\, \rho^2 + P_3\, \rho^3 + \ldots \qquad \text{(I-60)}$$

où les P_i sont aussi périodiques en ϑ. On est donc ramené au problème précédent (voir (I-48)).

On présentera plus tard, un exemple d'application (section I-4-3), la récurrence considérée étant de la forme :

$$x_1 = x + y + \varphi_{n0}\, x^{\ell} + \varphi_{n+1,0}\, x^{\ell+1} + O^{\ell+1}(x, y)$$

$$y_1 = y - x^{2\ell-1} + \psi_{21,0}\, x^{2\ell} + O^{2\ell}(x, y)$$

Cas III : $m < n$, $n < 2m-1$, $\psi_{n0} < 0$, n impair

Ce cas peut être traité de la même façon que pour le cas I, à moins que la stabilité soit déjà définie par (S2) ou (I4).

I-4 - EXEMPLES ET SIMULATIONS NUMERIQUES

Dans cette section quelques exemples sont donnés à titre d'illustration.

I-4-1 - Quelques cas étudiés dans le paragraphe I-2-2. Courbes invariantes aus sens employé dans la section I-2-3

Exemple 1 : Considérons la récurrence

$$x_1 = x + y + x^2$$

$$y_1 = y + 3\, x^2$$

Cette récurrence appartient au Cas A (I-2-3) et elle admet les courbes invariantes :

$$y = +\sqrt{2}\, x^{3/2} + \ldots .$$

la singularité étant donc du type rebroussement ou cuspidal. La figure I-4-a est le résultat d'une simulation numérique consistant en l'itération de quelques points initiaux pris autour de l'origine. On remarque nettement la présence des courbes invariantes qui ont un caractère asymptotique par

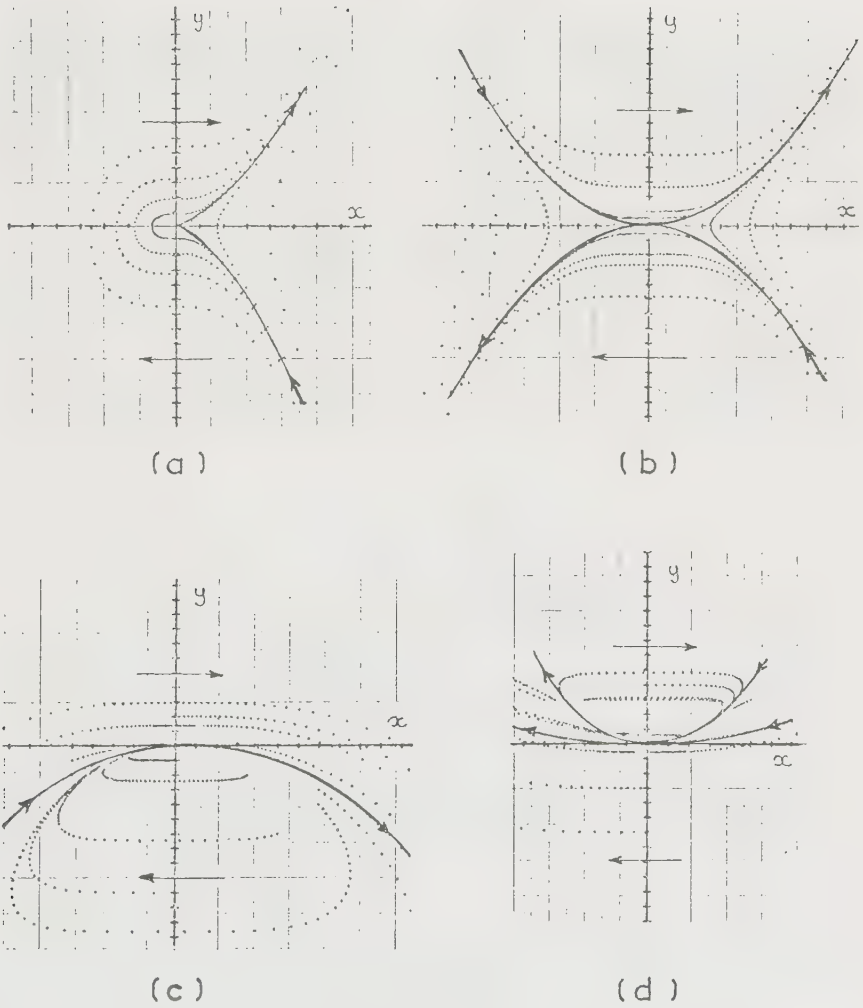


Figure I-4 : Trajectoires discrètes correspondant aux exemples du § I-4-1
Ech. : (x) 1 div = 10^{-2}; (y) 1 div = 10^{-3}. Les courbes invariantes sont représentées en trait continu.

rapport aux trajectoires discrètes.

Exemple 2 : De façon analogue les récurrences suivantes ont été simulées numériquement.

2-a) $x_1 = x + y + x^3$

$y_1 = y + 3\,x^3$

(Cas A (I-2-3))

Dans ce cas les courbes invariantes sont données par :

$y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\; x^2 + \ldots$

(voir fig. I-4-b)

2-b) $x_1 = x + y - 3\,x^3$

$y_1 = y - 3\,x^5$

(Cas B (I-2-3))

Les courbes invariantes sont :

$y = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) x^3 + \ldots$

2-c) $x_1 = x + y + \varphi_{20}\,x^2 + \varphi_{30}\,x^3$

$y_1 = y - x^3 + \Psi_{40}\,x^4$

I) - $\varphi_{20} = \sqrt{2}$, $\varphi_{30} = 4{,}36$, $\Psi_{40} = 2$

Ici, nous n'avons qu'une seule courbe invariante (Cas B (I-2-3))

(Fig. I-4-c)

$y = - x^2 + \ldots$

et l'origine a un comportement semi-stable.

II) - $\varphi_{20} = - 2$; $\varphi_{30} = 2{,}375$; $\Psi_{40} = 2$

Ici nous avons deux courbes invariantes :

$y = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\; x^2 + \ldots$

Par analogie au cas continu (équations différentielles) on peut distinguer autour du point fixe des secteurs du type parabolique, elliptique et hyperbolique délimités par les lignes invariantes. L'origine est semi-stable (fig. I-4-d).

I-4-2 - Quelques exemples pour la Section I-2-3

Exemple 1 : "Foyers" et "Centre"

1-a) $x_1 = x + y - 5x^3$, $y_1 = y - 3x^3$

Comme il a été souligné à la p. 38 ce cas est du type "Foyer" stable (fig. I-5-a).

1-b) $x_1 = x + y + 5x^3$, $y_1 = y - 3x^3$

est un "Foyer" instable (fig. I-5-b).

1-c) $x_1 = x + y - 3x^3$, $y_1 = y - 3x^3$

Il s'agit ici d'un cas spécial, dont la stabilité n'est définie par aucune des méthodes proposées auparavant. Cette transformation préserve l'aire car le Jacobien fonctionnel est unitaire. On se trouve donc en présence d'un cas elliptique (au sens de Birkhoff [2]) dont l'étude présente très certainement des difficultés semblables à celles rencontrées dans les cas où le multiplicateurs sont de la forme $e^{\pm j\varphi}$ ($\varphi \neq 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) [2 - 24 - 23] .

D'après la section I-2-4 nous pouvons encore parler de cas transcendant. Pour le système continu correspondant (voir [14] p. 152) le mouvement non perturbé est stable lorsque toutes les fonctions $u_2, u_3, \ldots$ sont périodiques (p. 43). Donc, dans le cas intégrable, c'est-à-dire, si le système différentiel formel (I-27) est tel que les séries qui le définissent sont convergentes dans un voisinage de l'origine, il est possible d'affirmer que le point fixe est stable, la stabilité étant du type conservatif.

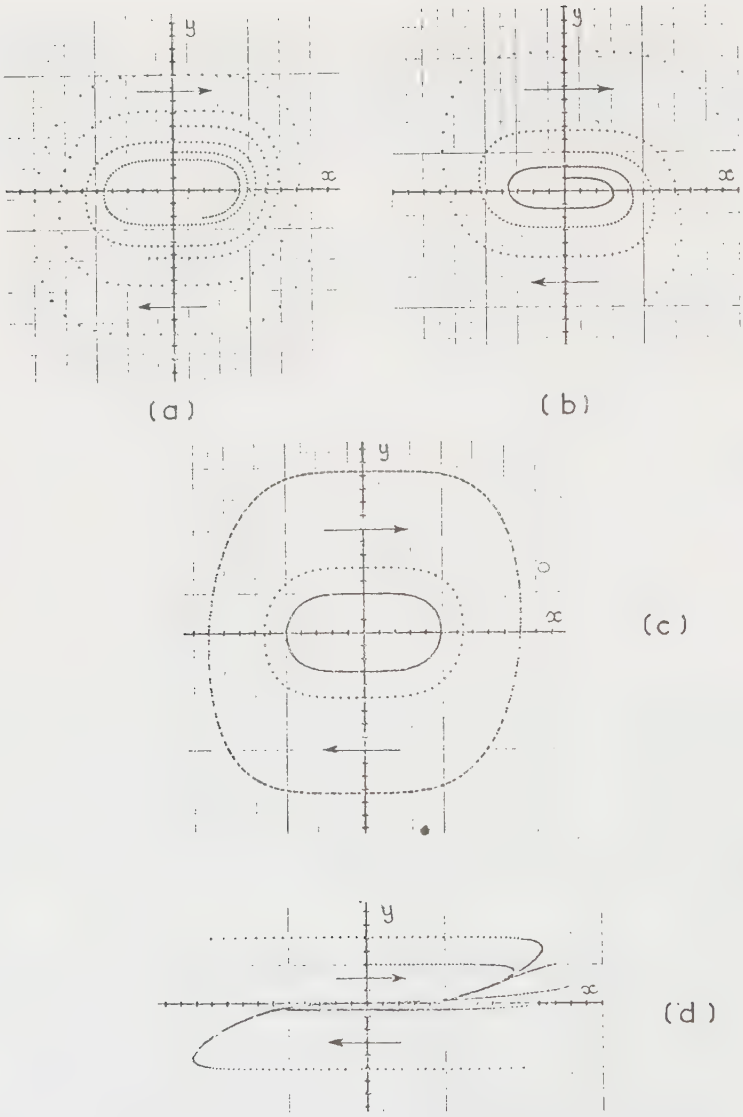


Figure I-5 : Trajectoires discrètes correspondant aux exemples du § I-4-2.
Ech. : (x) 1 div = 10^{-2}, (y) = 10^{-3}

Cependant on ne peut pas, en général, déterminer "a priori" l'intégrabilité d'une telle transformation ponctuelle.

Pour l'exemple traité ici, nous avons d'après la fig. I-5-c un comportement apparemment stable, du type centre.

Exemple 2 : $x_1 = x + y - 3x^3$
$y_1 = y - 3x^5$ (Cas B - I-2-3)

Les courbes invariantes sont :

$$y = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) x^3 + \ldots$$

Ces courbes n'ont que des branches attractives et la stabilité est du type asymptotique (figure I-5-d).

I-4-3 - Une application de la section I-2-4

Sont établies ici des conditions de stabilité (ou instabilité) pour la récurrence suivante :

$$x_1 = x + y + B x^{\ell} + B_1 x^{\ell+1} + \ldots$$
$$y_1 = y - x^{2\ell-1} + A x^{2\ell} + \ldots \qquad (\ell = 2, 4, 6, \ldots)$$

Supposons vérifiée la condition :

$$B^2 - 4/\ell < 0$$

On se trouve ainsi dans le cas II de la section I-3.

Le système différentiel formel correspondant sera de la forme (I-27) avec $m = \ell$ et $n = 2\ell-1$.

– Si $\ell = 2$ nous avons :

$C_{20} = B$, $C_{11} = -B$
$C_{30} = B_1 + \frac{1-2B}{2}$; $D_{30} = -1$, $D_{21} = 3/2$, $D_{40} = A + \frac{3B}{2}$

Pour arriver à la forme (I-40) on peut effectuer une substitution du type :

$$\bar{y} = y + B x^2 + B_1^{\star} x^3 + \ldots$$

où $B_1 = 3 B_1 + \frac{3}{2}$ $\qquad (\bar{\mathfrak{X}}(x, 0) = 0).$

Les nouveaux coefficients sont

$$\bar{C}_{20} = \bar{C}_{30} = 0 \quad ; \quad \bar{C}_{11} = - B$$
$$\bar{D}_{30} = - 1 \quad , \quad \bar{D}_{40} = A_1$$
$$\bar{D}_{11} = 2 B \quad , \quad \bar{D}_{21} = 3B_1 - 2B^2 + 3$$

et les expressions (I-41) et (I-42) sont données par :

$$f(x) = - x^3 + A_1 x^4 + \ldots$$
$$\varphi(x) = 2B x + (3B_1 - 2B^2 + 3) x^2 + \ldots$$

D'après les résultats de Lyapunov, la première fonction non-périodique de la séquence (I-49) associée à l'équation (I-60) (p. 51) sera en général u_2 et g aura le même signe que l'expression

$$L = 6 A_1 B - 6 B^2 + 15 (B_1 + 1)$$

Les figures I-6-a - I-6-d illustrent quelques situations possibles.

. Si $L < 0$ il y a stabilité asymptotique

. Si $L > 0$ il y a instabilité

- Si $\ell > 2$, l'expression de L est donnée par

$$L = \ell (\ell + 1) A_1 B + (2\ell + 1) (\ell + 1) B_1$$
$$= (\ell+1) \left[\ell A_1 B + (2\ell + 1) B_1 \right]$$

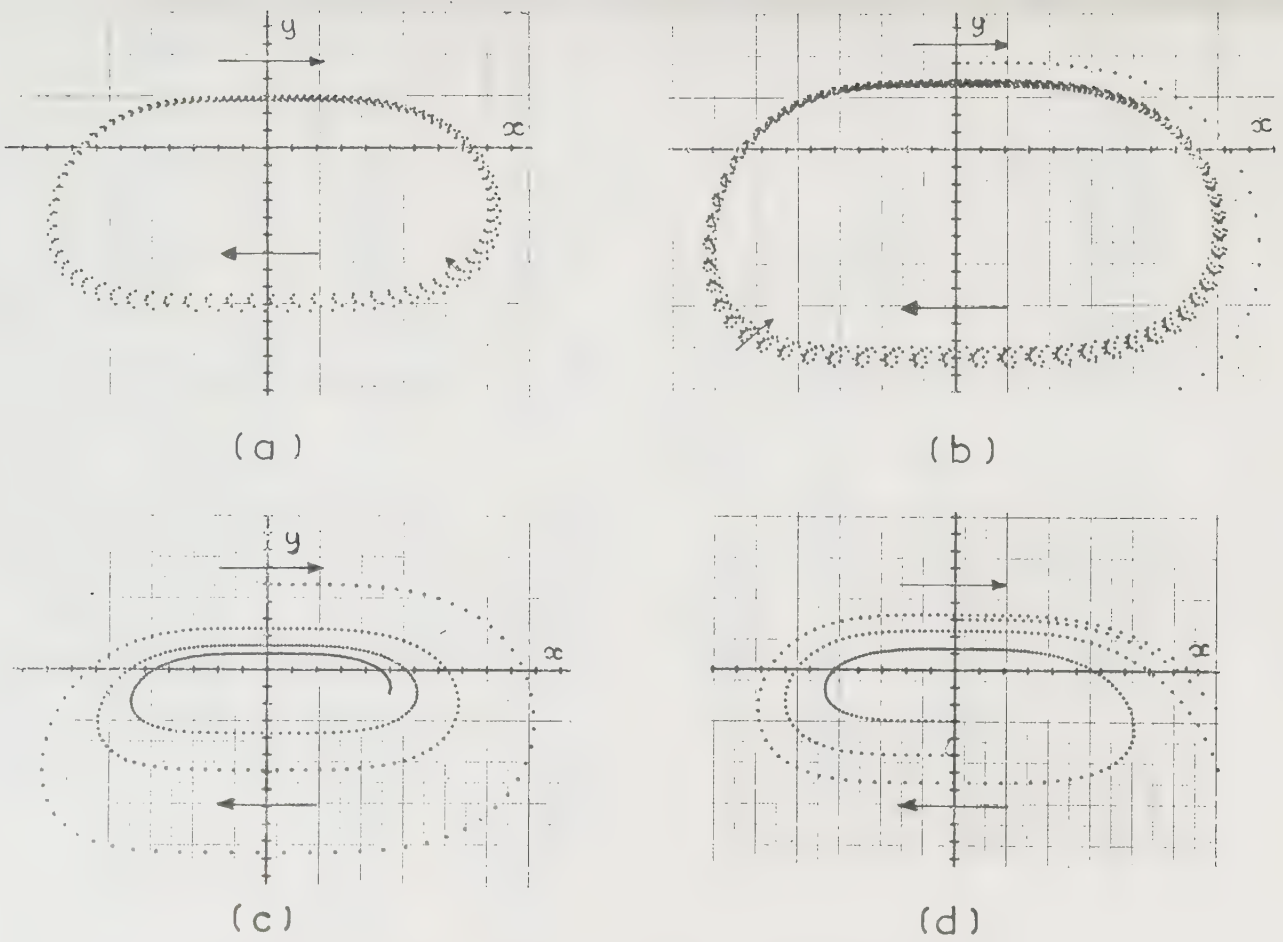


Figure I-6 : Trajectoires discrètes correspondantes aux exemples du § I-4-3
Ech : (x) 1 div = 10^{-2}, (y) 1 div = 10^{-3}

I-4-4 - Analyse de la stabilité d'un système de commande échantillonné, décrit par une récurrence de type (I-1)

On considère ici le système de la figure I-7, où f (v) est un bloc non-linéaire de la forme

$$f(v) = \beta\, v^3$$

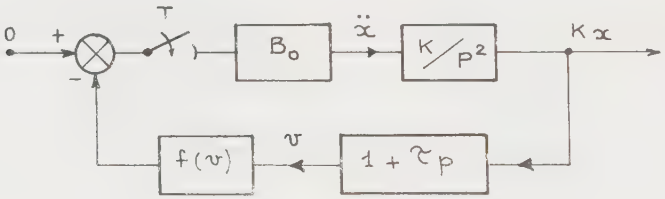


Figure I-7

Posant $y = \frac{dx}{dt}$ on obtient pour l'évolution du système entre les instants d'échantillonnage nT et (n+1)T, un système différentiel très simple de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = y \;;\; \frac{dy}{dt} = -\beta\,(K\,(x_n + \tau\, y_n))^3$$

x_n et y_n, étant les valeurs de x et y à l'instant nT. Par intégration on détermine la récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n + T y_n - \frac{T^2}{2}\,\beta\,(K(x_n + \tau y_n))^3$$

$$y_{n+1} = y_n + T\,\beta(K\,(x_n + \tau y_n))^3$$

Par le changement de variable $\overline{y} = Ty$, et en posant $\overline{\beta} = T^2 \beta\, K^3$ et $\overline{\tau} = \tau / T$ on est ramené au système :

$$x_{n+1} = x_n + y_n - \frac{1}{2}\,\overline{\beta}\,(x_n + \overline{\tau}\, y_n)^3$$

$$y_{n+1} = y_n - \beta\,(x_n + \overline{\tau}\, y_n)^3 \qquad (\overline{\tau} > 0$$

qui est une récurrence du type (I-1). Considérant la forme réduite (I-6)nous avons de façon immédiate, les relations :

$$\varphi_{30} = -\left(\frac{1}{2} + \overline{\tau}\right)\beta \quad ; \quad \Psi_{30} = -\overline{\beta}$$

- Si $\overline{\beta}$ est négatif, le critère (I 2) (p. 50) permet de dire que le système est instable. (D'ailleurs ceci est évident à partir de l'expression de la récurrence traitée).

- Si $\overline{\beta}$ est positif, d'après les critères (S 1) et (I 3) il y aura :

a) stabilité, si $\overline{\tau} > 1/2$

b) instabilité , si $\overline{\tau} < 1/2$ (voir figs. I-8-a - I-8-c).

Il est intéressant de noter que si $\overline{\tau} = 1/2$ la récurrence est conservative (fig I-8-d).

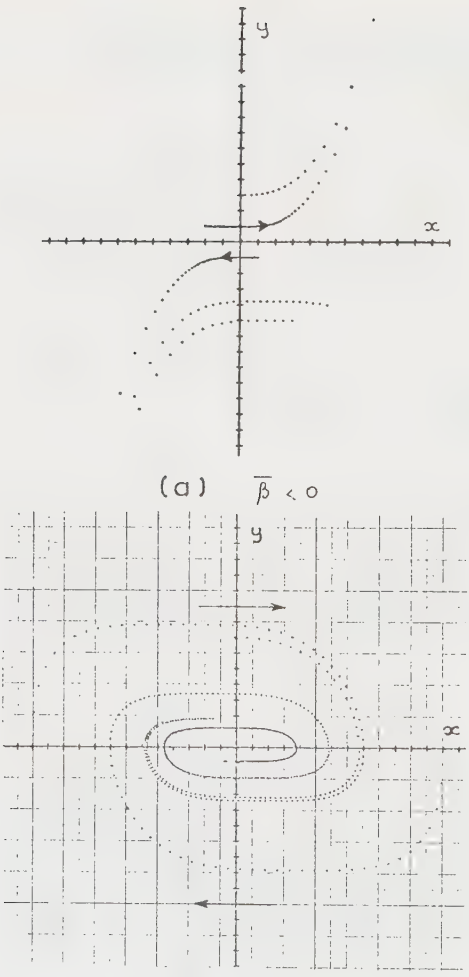
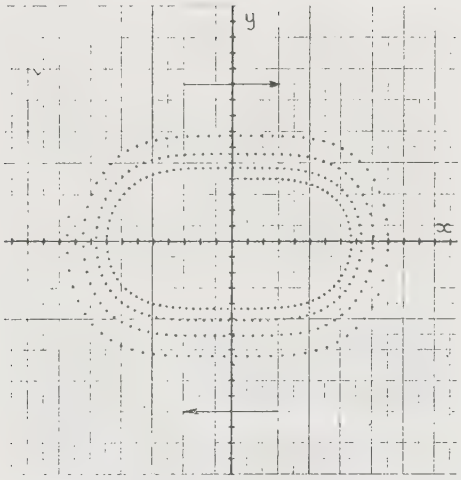
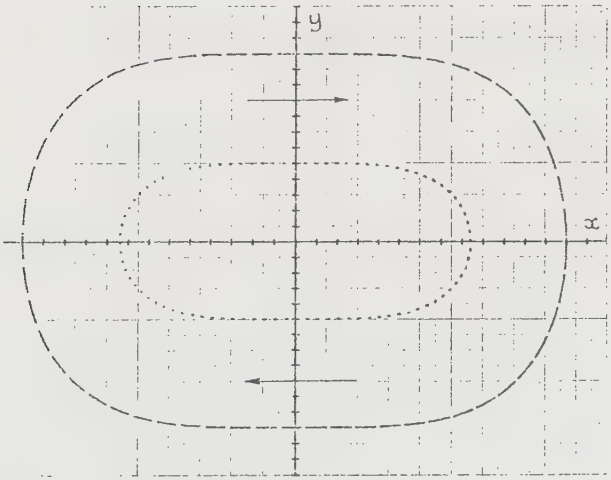

y
x
(a) $\overline{\beta} < 0$
y
x
(b) $\overline{\beta} > 0$, $\overline{\tau} > \frac{1}{2}$ (stable)

Figure I-8



(c) $\overline{\beta} > 0$, $\overline{\tau} < \frac{1}{2}$ (instable)



(d) $\overline{\beta} > 0$, $\overline{\tau} = \frac{1}{2}$, (centre)

Figure I-8. Trajectoires discrètes pour l'exemple du § I-4-4.
Ech. : (x) 1 div = 10^{-2} , (y) 1 div = 10^{-3}

ANNEXE A 1

COURBES INVARIANTES

La détermination des courbes invariantes $y = f(x)$ est faite à partir de l'équation fonctionnelle (I-12) (ch. I) qui est réécrite ci-après :

$$f\left[x + f(x) + X(x, f(x))\right] = f(x) + Y(x, f(x)) \qquad (A1\text{-}1)$$

On cherche les courbes invariantes pouvant s'exprimer sous la forme :

$$f(x) = p_0 x^{\alpha} + \sum_{i=1}^{\infty} p_i x^{\alpha + i/2} \quad (\alpha > 1) \qquad (A1\text{-}2)$$

(voir p. 23)

En portant (A1-2) dans (A1-1) et réarrangeant les termes on obtient :

$$\alpha p_0 x^{\alpha-1}(f(x) + X) + (f'(x) - \alpha p_0 x^{\alpha-1})(f(x) + X) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}\left[f(x) + X\right]^j = Y(x, f(x)) \quad (*) \qquad (A1\text{-}3)$$

Considérant la forme réduite (I-6) de (I-1) on a $X(x, 0) = \psi_{m0} x^m + \ldots$ et $Y(x, 0) = \psi_{n0} x^n + \ldots$

Ne connaissant pas à l'avance la valeur de α, on envisage donc, successivement les hypothèses $\alpha > m$, $\alpha = m$, $\alpha < m$. L'identification des termes de plus bas degré dans (A1-3) permet de distinguer les trois cas ci-dessous, indirectement.

(*) $f^{(j)}$: dérivée d'ordre j

- Cas A ($\alpha < m$) , $n < 2m - 1$:

L'identification des termes de plus bas degré de (A1-3) ($2\alpha - 1$ à droite et n à gauche) conduit aux relations

$$\alpha = (n+1)/2 \quad , \quad \alpha p_0^2 = \Psi_{n0} \qquad \text{(A1-4)}$$

et l'identification des termes de degré $2\alpha + i/2 - 1$ conduit à ($i = 1, 2, 3, \ldots$)

$$(2\alpha + \frac{i}{2}) \, p_0 \, p_i = F_i (p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}) \qquad \text{(A1-5)}$$

F_i étant des polynomes de ses arguments.

Si n est impair alors $p_i = 0$ ($i = 1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots$) donc f(x) est une série de puissances entières pour n impair.

-Cas B ($\alpha = m$) $n = 2m - 1$:

- Identification des termes de plus bas degré ($2\alpha - 1$ et n) :

$$\alpha = m \quad , \quad \alpha p_0^2 + \Psi_{m0} \; \alpha p_0 = \Psi_{n0} \qquad \text{(A1-6)}$$

- Identification des termes de degré $2\alpha + i/2 - 1$:

$$\alpha p_0 p_i + (\alpha + i/2) \, p_i \, (p_0 + \Psi_{m0}) = G_i (p_0, p_2, \ldots, p_{i-2}) \qquad \text{(A1-7)}$$

(G_i : idem F_i ci-dessus).
pour i pair. Si i est impair $p_i = 0$ (f(x) est série de puissances entières).

Une conditions suffisante pour que tous les p_i (i pair) soient bien définis par (A1-7) est :

$$p_0 (2m+q) + \Psi_{m0} (m+q) \neq 0 \quad , \quad \forall q > 0 \quad , \; q \text{ entier} \qquad \text{(A1-8)}$$

-Cas C ($\alpha \geq m$) $n > 2m - 1$:

Si on suppose $\alpha = m$ avec $n > 2m - 1$ on obtient comme auparavant :

$$(\alpha = m) \quad \alpha p_0 (p_0 + \Psi_{m0}) = 0$$

soit, $p_0 = - \varphi_{m0}$ (A1-9)

et pour i pair :

$$p_0 \, p_i = H_i (p_0, p_2, \ldots, p_{i-2}) \qquad \text{(A1-10)}$$

(H_i : idem que F_i ci-dessus) $p_i = 0$ pour i impair.

(A 1-9) est obtenue par l'identification des termes de degré $2m - 1$ et (A 1-10) par l'identification des termes de degré $2\alpha - 1 + i/2$.

Supposant maintenant $\alpha > m$ on obtient de façon analogue les relations :

$$\alpha = n - m + 1 \quad (> m) \, , \; \alpha p_0 \, \varphi_{m0} = \varphi_{n0} \qquad \text{(A1-11)}$$

$$(\alpha + i/2) \, \varphi_{m0} \, p_i + \alpha p_0 \, p_{i+m-\alpha} = \bar{H}_i (p_0, p_2, \ldots, p_{i-2}) \qquad \text{(A1-12)}$$

pour i pair ($\bar{H}_i$: idem que F ci-dessus).

$p_j = 0$ pour j impair ou négatif (Noter $p_{i+m-\alpha}$ dans (A1-12)).

ANNEXE A 2

EQUATION DIFFERENTIELLE FORMELLE ASSOCIEE A (I-6)

$(m \leq n)$, $\varphi_{m0} \neq 0$ et $\psi_{n0} \neq 0$

Tout d'abord réécrivons la récurrence (I-6) sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + \sum_{i=m}^{\infty} X_i(x, y) \\ y_1 &= y + \sum_{i=n}^{\infty} Y_i(x, y) \end{aligned} \qquad \text{(A2-1)}$$

où X_i et Y_i représentent des polynomes homogènes en x et y, de degré i.

La série (I-19) prendra, dans ce cas, la forme :

$$\begin{aligned} x_k &= x + ky + \sum_{i=m}^{\infty} X_i^{(k)}(x, y) \\ y_k &= y + \sum_{i=n}^{\infty} Y_i^{(k)}(x, y) \end{aligned} \qquad \text{(A2-2)}$$

où $X_i^{(k)}$, $Y_i^{(k)}$ représentent encore des polynomes homogènes mais dont les coefficients sont des fonctions de k. Certains de ces coefficients, nécessaires pour le premier chapitre sont déterminés ci-dessous :

A partir des équations (A2-1) et (A2-2) on peut déduire les relations suivantes :

a) Si m = n

$$Y_n^{(k+1)} - Y_n^{(k)} = Y_n(x + ky, y)$$

$$X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)} = Y_n^{(k)} + X_n(x + ky, y) \qquad (A2\text{-}3)$$

b) si m < n

$$Y_n^{(k+1)} - Y_n^{(k)} = Y_n(x + ky, y)$$

$$X_m^{(k+1)} - X_m^{(k)} = X_m(x + ky, y) \qquad (A2\text{-}4)$$

Soient $\varphi_{jk}^{(k)}$ et $\psi_{jk}^{(k)}$ les coefficients correspondants au terme $x^j y^k$ des polynomes $X_i^{(k)}$ et $Y_i^{(k)}$ (i = j + k) respectivement.

- Si m = n, on obtient les équations aux différences suivantes :

$$\psi_{n0}^{(k+1)} - \psi_{n0}^{(k)} = \psi_{n0}$$

$$\psi_{n-1,1}^{(k+1)} - \psi_{n-1,1}^{(k)} = \psi_{n0} \cdot k \cdot n + \psi_{n-1,1} \qquad (A2\text{-}5)$$

$$\varphi_{n0}^{(k+1)} - \varphi_{n0}^{(k)} = \varphi_{n0} + \psi_{n0}^{(k)}$$

Avec les conditions initiales $\psi_{n0}^{(0)} = \psi_{n-1,1}^{(0)} = \varphi_{n0}^{(0)} = 0$, les solutions de (A2-5) sont données par les expressions :

$$\psi_{n0}^{(k)} = k\,\psi_{n0}$$

$$\psi_{n-1,1}^{(k)} = n\,\frac{\psi_{n0}}{2}\,k^2 + \left(\psi_{n-1,1} - n\,\frac{\psi_{n0}}{2}\right)k \qquad (A2\text{-}6)$$

$$\varphi_{n0}^{(k)} = \frac{\psi_{n0}}{2}\,k^2 + \left(\varphi_{n0} - \frac{\psi_{n0}}{2}\right)k$$

- De façon analogue, si $m < n$ on obtient :

$$\Psi_{n0}^{(k)} = k\ \Psi_{n0}\ ,\quad \varphi_{m0}^{(k)} = k\ \varphi_{m0} \tag{A2-7}$$

D'après la Proposition I-1 de la section I-2-2-1, si on écrit l'équation différentielle formelle associée à (I-1) sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{i+j=m}^{\infty} C_{ij}\, x^i y^j$$
$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=n}^{\infty} D_{ij}\, x^i y^j \tag{A2-8}$$

alors

$$C_{ij} = \frac{d\,\varphi_{ij}^{(k)}}{dk}\bigg|_{k=0}\ ,\quad D_{ij} = \frac{d\,\Psi_{ij}^{(k)}}{dk}\bigg|_{k=0} \tag{A2-9}$$

Utilisant les expressions (A2-6) et (A2-7), nous obtenons :

a) pour $m = n$:

$$C_{n0} = \varphi_{n0} - \frac{\Psi_{n0}}{2}\ ,\quad D_{n0} = \Psi_{n0},\ D_{n-1,1} = -\,\Psi_{n0}\, n/2 \qquad (\Psi_{n-1,1} = 0) \tag{A2-10}$$

b) pour $m < n$

$$C_{m0} = \varphi_{m0}\ ,\quad D_{n0} = \Psi_{n0} \tag{A2-11}$$

CHAPITRE II

ANALYSE D'UN CAS CRITIQUE POUR UNE RECURRENCE AUTONOME DE DEGRE SUPERIEUR A DEUX

II-1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre seront considérés les cas critiques pour une récurrence d'ordre N + 2, admettant un point double dont deux multiplicateurs sont unitaires, de multiplicité 2 (comme au chapitre I) et tous les autres sont en module inférieurs à l'unité.

Dans un premier temps (Sec. II-2), quelques résultats dus à G.D. Birkhoff [2 – 3] et D.C. Lewis [20] sont brièvement rappelés, puis utilisés pour la démonstration de la Proposition II-1 (§ II-2-2). Cette proposition employée aux premier et second chapitres permet d'associer à une transformation ponctuelle, autour d'un point double, un système d'équations différentielles à coefficients périodiques. La propriété principale de ce système est qu'il peut être construit de façon que les coefficients non constants (par rapport au temps) ne figurent que dans les termes de degré non inférieur à L. L'entier L peut être fixé à l'avance et aussi élevé que l'on veut. Il est sous entendu que la transformation ponctuelle satisfait la condition de "pseudo-incommensurabilité" définie par Lewis. Cependant il convient de noter que cette condition ne porte que sur les termes linéaires de la transformation.

Dans la Sec. II-3 la récurrence envisagée est définie,ainsi que certains changements de variables permettant de la ramener sous une forme convenable .

A l'aide de la Proposition II-1 on peut lui associer un système différentiel semblable à celui décrit ci-dessus. Alors, au lieu de considérer le problème de stabilité du point double on considère la stabilité du mouvement non perturbé trivial du système différentiel associé, comme dans les §§ I-2-3 et I-2-4 du chapitre précédent.

Par des considérations sur les propriétés du système différentiel associé (Sec. II-4) on vérifie que ce système satisfait les conditions d'un

théorème dû à Malkin [15] (§ II-5-1). Le problème est alors ramené à celui de la stabilité selon l'approximation d'ordre K_1 (Malkin [15] , K_1 étant un entier non inférieur à 2) du mouvement non perturbé trivial d'un système différentiel d'ordre deux. Ceci se fait à l'aide des résultats du chapitre I (§ II-5-2). Comme conséquence, l'investigation de la stabilité du point double de la récurrence à N + 2 dimensions peut se réduire à la considération d'une récurrence d'ordre deux analogue à celle traitée au premier chapitre. Ces résultats se trouvent condensés dans la Proposition II-3.

A titre illustratif un exemple du quatrième ordre est fourni à la Sec. II-6.

Dans un dernier temps une extension de la méthode utilisée permet de considérer le cas critique plus général où un ou plusieurs multiplicateurs sont unitaires en module.

D'une part, ceci constitue une façon alternative d'étude des cas critiques traités dans [8] (un multiplicateur réel unitaire) et dans [26] (deux multiplicateurs complexes conjugués, unitaires en module). D'autre part, la méthode proposée ici permet la considération de cas où il y a possibilité d'un cas d'exception, ou de cas à plus de deux multiplicateurs de module unitaire.

II-2 - SUR LES SYSTEMES DIFFERENTIELS ASSOCIES A UNE TRANSFORMATION PONCTUELLE

Dans une note [3] publiée en 1928, G.D. Birkhoff a montré que si

$$T_c : \quad p_1 = \varphi(p, q) \quad , \quad q_1 = \psi(p, q) \qquad \text{(II-1)}$$

est une transformation ponctuelle préservant l'aire telle que :

- φ, ψ sont continues ainsi que toutes leurs dérivées partielles (classe C^∞),

- l'origine p = q = 0 est un point fixe de T_c, alors il existe un système dynamique associé du type :

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{II-2}$$

où $H = H(p, q, \tau)$ est périodique par rapport à τ et $H \in C^{\infty}$, dont la solution $S(\tau ; p(0), q(0))$ passant par le point $(p(0), q(0))$ à l'instant $\tau = 0$ définit une transformation ponctuelle

$$(p(1), q(1)) = S(\alpha ; p(0), q(0)) \tag{II-3}$$

(α étant la période de H en τ) identique à T_c.

Remarque : La transformation T_c préserve l'aire si son jacobien fonctionnel est unitaire. T_c est alors conservative avec fonction "quasi-invariante" égal à 1 [2].

oo0oo

Considérons maintenant les transformations analytiques du type :

$$\begin{aligned} p_1 &= ap + bq + \sum_{i+j=2}^{\infty} \varphi_{ij}\, p^i\, q^j \\ q_1 &= cp + dq + \sum_{i+j=2}^{\infty} \psi_{ij}\, p^i\, q^j \end{aligned} \tag{II-4}$$

telles que $ad - bc \neq 0$ et l'on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Evidemment cette classe de transformations ponctuelles est plus générale que celles des transformations conservatives.

On se propose par la suite d'obtenir un résultat analogue à celui du cas conservatif, c'est-à-dire, de construire un système d'équations différentielles à coefficients périodiques associé à (II-4) dans le sens spé-

cifié ci-dessus (voir (II-3)). De plus, les résultats s'étendent sans difficultés aux transformations multidimensionnelles à l'aide de certains résultats présentés dans le paragraphe qui suit.

II-2-1 - Rappel de certains résultats de G. D. Birkhoff et D. C. Lewis

Rappelons tout d'abord la notion de "pseudo-incommensurabilité" introduite par C. Lewis [20] .

Définition 1 : Un ensemble fini de valeurs complexes $\{ \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_N \}$ est dit pseudo-incommensurable quand il existe des nombres complexes $\xi_1, \ldots, \xi_s$ possédant les propriétés :

I - Chaque μ_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ peut s'exprimer sous la forme $\mu_n = \sum_{i=1}^{s} N_{ni}\, \xi_i$, où les N_{ni} sont des entiers algébriques $(N_{ni} \in Z)$.

II - Il n'existe pas de combinaisons linéaires des ξ_s du type $\sum_{j=1}^{s} N_j\, \xi_j$ $(N_j \in Z)$ donnant un multiple non nul de $2\pi i$.

Définition 2 : Soit une transformation ponctuelle complexe à n dimensions du type :

$$T : x_s(1) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_n=1}^{\infty} X_s^{(j_1,\ldots,j_n)} \cdot x_1(0)^{j_1}\, x_2(0)^{j_2} \ldots x_n(0)^{j_n}$$

$$s = 1, 2 \ldots, n \qquad \text{(II-5)}$$

les $X_s^{(j_1, j_2, \ldots j_n)}$ étant des constantes complexes et soit A la matrice formée par les coefficients des termes linéaires de T. La transformation sera alors du type pseudo-incommensurable si les valeurs propres S_s $(s = 1, 2, \ldots n)$ de A sont telles que l'on puisse choisir les valeurs $\mu_1 = \ln S_1, \mu_2 = \ln S_2, \ldots, \mu_n = \ln S_n$ de façon à former un ensemble pseudo-incommensurable.

Note : Le logarithme de S a plusieurs déterminations complexes.

Considérons alors T (II-5) comme une transformation analytique et non singulière du voisinage de l'origine de l'espace n-dimensionnel en lui-même. Le k-ième itéré de T, noté par T^k, est défini lorsque k est un entier et peut se représenter par des séries de puissances convergentes, dont les coefficients sont fonctions de k. D'autre part la relation $T^{k+\ell} = T^k T^\ell$ est vérifiée pour des valeurs entières k et ℓ quelconques. La question qui se pose ici est de savoir s'il est possible de définir T^k pour des valeurs non entières de k de façon à rendre valable cette relation pour des valeurs réelles de k et ℓ. A l'aide de certains exemples on peut montrer qu'une dépendance analytique par rapport à k est un cas exceptionnel. Dans sa note [20], Lewis montre cependant, qu'en général, on peut définir les coefficients de T^k pour tout k ($k \in R$) de telle manière que $T^{k+\ell} = T^k T^\ell$ se vérifie d'une façon purement formelle, sans considération de la convergence des séries T^k. Par ailleurs, les coefficients de ces séries sont des polynomes en k et d'un nombre fini d'expressions du type $e^{\mu k}$.

Avant Lewis, Birkhoff avait traité ce sujet dans [2], les transformations considérées étant du type conservatif, à deux variables, liées aux systèmes dynamiques (conservatifs).

Pour les transformations du type "pseudo-incommensurable" Lewis a pu montrer la validité de la relation $T^{k+\ell} = T^k T^\ell$. Ce type de transformations est le type général dans un sens très large. La situation est essentiellement différente pour les transformations qui ne sont pas de ce type. Néanmoins si T est une transformation (formelle) non-singulière quelconque, il est toujours possible de trouver en entier J positif, tel que T^J soit du type pseudo-incommensurable.

Par simplicité, on ne considère par la suite que le cas n = 2, les résultats énoncés pouvant s'étendre sans difficulté essentielle aux autres cas.

Soit alors T définie par les expressions (II-4). Il est donc possible d'écrire T^k (k entier) sous la forme :

$$T^k \begin{cases} p_k = a(k) \cdot p + b(k) \cdot q + \sum_{i+j=2}^{\infty} \varphi_{ij}(k)\, p^i q^j \\ q_k = c(k) \cdot p + d(k) \cdot q + \sum_{i+j=2}^{\infty} \psi_{ij}(k)\, p^i q^j \end{cases} \qquad \text{(II-6)}$$

(voir par ex. [2] ou, pour un cas particulier l'Annexe A2; pour le cas à n dimensions voir [20]).

Il est clair que les séries de T^k sont convergentes du moins pour des valeurs entières de k, autour de l'origine (p = q = 0).

Pour déterminer ces séries on impose $p_0 \equiv p$ et $q_0 \equiv q$, ce qui implique que :

$$a(0) = d(0) = 1 \quad , \quad b(0) = c(0) = \varphi_{ij}(0) = \psi_{ij}(0) = 0$$

Les coefficients de (II-6) sont alors obtenus par résolution de systèmes linéaires d'équations aux différences.

Avec l'hypothèse de pseudo-incommensurabilité il est possible de choisir les exposants μ (Déf. 2) de façon à vérifier les propriétés de la Déf. 1. La solution de ces équations aux différences peuvent alors s'exprimer par des polynômes de $e^{\pm \mu_n k}\, k^{\ell}$ ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$; μ_1, μ_2 = détermination particulière de $\ell n\, S_1$ et $\ell n\, S_2$) de façon unique ([20] p. 803).

Comme conséquence de la pseudo-incommensurabilité la relation

$$T^{k+\tau} = T^k\, T^{\tau} \qquad \text{(II-7)}$$

est formellement satisfaite, $\forall$ k, τ réels

Posant maintenant

$$\begin{aligned} p_{k+\tau} &= P(\tau, p_k, q_k) \\ q_{k+\tau} &= Q(\tau, p_k, q_k) \end{aligned} \qquad \text{(II-8)}$$

un système différentiel formel D, associé à T [2 - 20] sera donné par :

$$D \left[\begin{array}{l} \dfrac{dp_k}{dk} = \dfrac{\partial P(\tau, p_k, q_k)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = U(p_k, q_k) \\ \dfrac{dq_k}{dk} = \dfrac{\partial Q(\tau, p_k, q_k)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = V(p_k, q_k) \end{array} \right. \qquad \text{(II-9)}$$

Les expressions (II-6) satisfont formellement le système D (k réel). C'est dans ce sens que le mot "associé" est ici employé.

oo0oo

Introduisons aussi les notions d'osculation entre deux transformations ponctuelles ou entre deux systèmes différentiels. Supposons que ces transformations ou ces systèmes différentiels soient définis par des séries qui peuvent être simplement formelles. Alors on dira qu'une transformation ponctuelle T (système différentiel $\mathfrak{D}$) est osculatrice à une autre transformation T' (un autre système $\mathfrak{D}'$) à l'ordre L, si les séries qui les définissent coïncident jusqu'aux termes de degré L (inclus).

Notation · $T \overset{L}{\sim} T'$, $\mathfrak{D} \overset{L}{\sim} \mathfrak{D}'$

II-2-2 - Systèmes différentiels à coefficients périodiques associés à la transformation T

La proposition démontrée dans ce paragraphe permet d'associer à la transformation T, un système différentiel à coefficients périodiques satisfaisant certaines conditions précisées plus loin.

Dans ce qui suit on utilisera la notation

$u(p, q) \sim O^L(p, q)$

pour indiquer que la fonction u (p, q) est développable en série de puissances

de p et q, convergente dans un voisinage de l'origine (p = q = 0) et dont les termes sont de degré supérieur à L. De même, si $\underline{v}(\underline{x})$ est une fonction vectorielle du vecteur $\underline{x} = (p, q)$ et si elle est définie par des fonctions du même type que ci-dessus on dénotera

$$\underline{v}(\underline{x}) \sim O^L(\underline{x})$$

Bien évidemment on a :

$$\lim_{|\underline{x}| \longrightarrow 0} \frac{|\underline{v}(\underline{x})|}{|\underline{x}|^L} = 0$$

les normes étant ici des normes Euclidiennes.

Proposition II-1

"Soit T une transformation ponctuelle analytique définie par (II-4). Supposons le cas où T est réelle et telle que le système différentiel D défini auparavant puisse être choisi réel (voir pages 87 et 91). Alors si T est du type pseudo-incommensurable, on peut associer à T (au sens précisé à la page 75) un système d'équations différentielles réelles du type

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dk} = \overline{U}(p, q) + E_1(k, p, q) \\ \\ \dfrac{dq}{dk} = \overline{V}(p, q) + E_1(k, p, q) \end{array}\right. \qquad (k \text{ réel}) \qquad \text{(II-10)}$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'origine p = q = 0. Les séries $\overline{U}$ et $\overline{V}$ ne dépendent pas de k de façon explicite et sont les séries finies obtenues à partir des séries formelles $\overline{U}$ et $\overline{V}$ de D (II-9) par troncature des termes de degré supérieur à un entier $L \geqslant 1$, arbitrairement élevé. Dans ce cas E_1 et E_2 sont des fonctions périodiques en k de période unitaire satisfaisant les relations :

$$E_1 \sim O^L(p, q) \quad , \quad E_2 \sim O^L(p, q)$$

pour toute valeur réelle de k. Ces fonctions admettent des dérivées partielles d'ordre quelconque, continues ($E_1, E_2 \in C^\infty$), (p, q) appartenant à un

voisinage suffisamment petit de l'origine p = q = 0.

Démonstration :

Réécrivons T et D comme ci-après :

$$T \quad \begin{cases} p(1) = a\,p(0) + b\,q(0) + \sum_{i+j=2}^{\infty} \varphi_{ij}\, p(0)^i \cdot q(0)^j \\ q(1) = c\,p(0) + d\,q(0) + \sum_{i+j=2}^{\infty} \psi_{ij}\, p(0)^i \cdot q(0)^j \end{cases}$$

$$D \quad \begin{cases} \frac{dp}{dk} = U(p, q) \\ \frac{dq}{dk} = V(p, q) \end{cases}$$

Définissons le système différentiel $\overline{D}$:

$$\overline{D} \quad \begin{cases} \frac{dp}{dk} = \overline{U}(p, q) \\ \frac{dq}{dk} = \overline{V}(p, q) \end{cases} \qquad \text{(II-11)}$$

$\overline{U}$ et $\overline{V}$ étant les polynômes définis dans l'énoncé.

Par conséquent on a la relation

$D \overset{L}{\sim} \overline{D}$ (voir page 79)

Bien évidemment $\overline{D}$ est un système analytique, ayant la solution triviale p(k) = q (k) = 0. Le Théorème d'Existence et d'Unicité est alors valable dans un certain voisinage $\mathcal{V}_0$ de l'origine (p = q = 0) et pour un intervalle d'intégration $\tau_1 < k < \tau_2$ avec $\tau_1 < -1$ et $\tau_2 > 1$.

Pour simplifier utilisons la notation vectorielle $\chi = (p, q)$, $\chi(k) = (p(k), q(k))$, $\overline{\chi}(k) = (\bar{p}(k), \bar{q}(k))$, etc... et $\mathcal{X} = (U, V)$, $\overline{\mathcal{X}} = (U, V)$ etc...

Soit S (k, χ (0)) la solution de $\overline{D}$ avec la condition initiale S = χ (0) pour k = 0, $\chi(0) \in \mathcal{V}_0$, $\tau_1 < k < \tau_2$. S est analytique en ses

arguments.

Définissons la transformation ponctuelle

$$\bar{T} = \bar{\chi}(1) = S(1 ; \chi(0)) \qquad \text{(II-12)}$$

Cette transformation est analytique et en plus, il est évident qu'elle possède un inverse (analytique)

$$\bar{T}^{-1} : \bar{\chi}^{-1}(1) = S(-1 ; \chi(0)) \qquad \text{(II-13)}$$

La matrice A étant régulière, si γ_0 est suffisamment petit on peut aussi définir de façon unique l'inverse T^{-1}, analytique et satisfaisant $T^{-1}(0) = 0$. Les transformations T, T^{-1}, $\bar{T}$ et $\bar{T}^{-1}$ sont par conséquent analytiques autour du point fixe commun p = q=0 [27] .

Comme D $\overset{L}{\sim}$ $\bar{D}$ alors T $\overset{L}{\sim}$ $\bar{T}$. On peut aisément montrer aussi que T^{-1} $\overset{L}{\sim}$ $\bar{T}^{-1}$.

Les transformations étant continues autour de l'origine p=q=0, il est possible de trouver un voisinage γ de l'origine suffisamment petit, $\gamma \subset \gamma_0$, tel que si $\chi(0) \in \gamma$ alors $\tilde{\chi}(0) = \bar{T}^{-1} T(\chi(0))$ est bien défini et $\tilde{\chi}(0) \in \gamma_0$. Posons $\chi(1) = T(\chi(0))$ et $\bar{\chi}(1) = \bar{T}(\chi(0))$. Il est facile de voir que

$$\chi(0) - \tilde{\chi}(0) \sim O^L(\chi(0)), \quad \chi(1) - \bar{\chi}(1) \sim O^L(\chi(0)) \qquad \text{(II-14)}$$

(voir déf. $\sim O^L(\chi)$ à la page 80).

Considérons alors les solutions S de (II-11) définies par

$$\bar{\chi}(k) = S(k ; \chi(0)) \ , \quad \tilde{\chi}(k) = S(k ; \tilde{\chi}(0)) \qquad \text{(II-15)}$$

pour $\tau_1 < k < \tau_2$ et $\chi(0) \in \gamma$. La première des relations (II-14) permet d'écrire

$$\tilde{\chi}(k) - \bar{\chi}(k) \sim O^L(\chi(0)) \qquad \text{(II-16)}$$

pour chaque $k \in (\tau_1, \tau_2)$

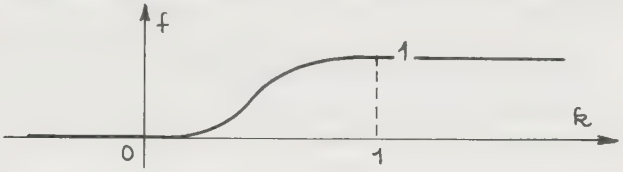
Définissons la fonction $\chi^*(k)$:

$$\chi^*(k) = \bar{\chi}(k) + f(k)\,(\tilde{\chi}(k) - \bar{\chi}(k)) \qquad \text{(II-17)}$$

ou

$$f(k) = c\int_0^k e^{-1/\rho(1-\rho)}\,d\rho \quad (0 \leq k \leq 1) \qquad \text{(II-18)}$$

c étant choisi de façon à avoir $f(1) = 1$; $f(k) = 0$ $(k < 0)$, $f(k) = 1$ $(k > 1)$



Etant aussi analytique par rapport à $\chi(0)$ pour chaque $k \in (\tau_1, \tau_2)$, $\chi^*(k)$ peut être développé en série de puissance de p(0) et q (0) autour du point p = q = 0. Comme ce développement est de la forme

$$\chi^*(k) = A^k\,\chi(0) + \ldots \qquad \text{(II-19)}$$

et $\det(A^k) \neq 0$, alors pour chaque couple $(\chi^*(k), k)$, $k \in (\tau_1, \tau_2)$, il y a un seul vecteur $\chi(0)$ satisfaisant (II-19), si $|\chi^*(k)|$ et $|\chi(0)|$ sont suffisamment petits. On voit ainsi que les courbes $\chi^*(k)$ dans l'espace (χ, k) remplissent un voisinage du segment $\tau_1 < k < \tau_2$ de l'axe k, sans se recouper.

On peut ainsi constater que f (k) est continue ainsi que toutes ses dérivées pour $-\infty < k < \infty$. Ces dérivées sont nulles pour $k \geq 1$ et $k \leq 0$.

Dérivant par rapport à k l'expression (II-17) on a :

$$\frac{d\chi^*(k)}{dk} = \frac{d\bar{\chi}(k)}{dk} + f(k)\left(\frac{d\tilde{\chi}(k)}{dk} - \frac{d\bar{\chi}(k)}{dk}\right) + \qquad \text{(II-20)}$$

$$+ f'(k)\left(\tilde{\chi}(k) - \bar{\chi}(k)\right)$$

et d'autre part

$$\frac{d\bar{x}}{dk} = \overline{X}\ (\bar{x}) \qquad \frac{d\tilde{x}}{dk} = \overline{X}\ (\tilde{x})$$

D'après la relation (II-16) on obtient à partir de (II-20) et (II-19) l'expression:

$$\frac{dx^*(k)}{dk} = \overline{X}\ (\overline{x}(k)) + \varepsilon\ (k,\ x(0)) \qquad \text{(II-21)}$$

où $\varepsilon\ (k, x(0)) \sim O^L\ (x(0))$ pour chaque $k \in (\tau_1, \tau_2)$.

Etant donné que A^k est régulière on peut écrire pour $k \in (\tau_1, \tau_2)$ (voir (II-17) et (II-19)) :

$$x(0) = \bar{A}^k\ x^*(k) + \ldots \qquad \text{(II-22)}$$

et

$$\bar{x}(k) - x^*(k) \sim O^L\ (x^*(k))$$

l'équation (II-21) peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\frac{dx^*}{dk} = \overline{X}\ (x^*) + \varepsilon_1\ (k, x^*) \qquad \text{(II-23)}$$

$k \in (\tau_1, \tau_2)$; $\varepsilon_1(k, x^*) \sim O^L\ (x^*)$

Soit la fonction E définie par :

$$E\ (k, x^*) = \varepsilon_1\ (\theta(k), x^*) \qquad \text{(II-24)}$$

et $\theta(k) = k \mod 1$, avec $0 \leq \theta \leq 1$.

E est donc, une fonction périodique de période 1 en k, continue par rapport à k et analytique en x^* autour du point $x^* = 0$.

Montrons que (II-24) définit bien une telle fonction .

a) E est continue par rapport à k.

En effet, par l'expression (II-17) nous avons

$$x^*(0) = \bar{x}(0) \qquad \text{et} \qquad x^*(1) = \tilde{x}(1)$$

$(f(0) = 0\ ,\ f(1) = 1)$

et par l'expression (II-20) (f' (0) = f' (1) = 0) :

$$\left.\frac{d\chi^*}{dk}\right|_{k=0} = \left.\frac{d\bar{\chi}}{dk}\right|_{k=0} = \overline{\mathcal{X}}\,(\bar{\chi}(0)) = \overline{\mathcal{X}}\,(\chi^*(0))$$

$$\left.\frac{d\chi^*}{dk}\right|_{k=1} = \left.\frac{d\tilde{\chi}}{dk}\right|_{k=1} = \mathcal{X}(\chi(1)) = \mathcal{X}\,(\chi^*(1))$$

On peut donc vérifier sur l'expression (II-23) que

$$\varepsilon_1\,(1, \chi^*) = \varepsilon_1\,(0, \chi^*) = 0 \qquad \text{(II-25)}$$

Comme ε_1 est continue par rapport à k dans l'intervalle (0, 1), cela démontre que E (k, χ^*) est continue par rapport à k, $-\infty < k < \infty$

b) L'analycité de E par rapport à χ^* autour de $\chi^* = 0$ est une conséquence de l'analycité de ε_1(k, χ^*), pour chaque k $\in (\tau_1, \tau_2)$.

Il est donc possible de développer en série de puissances de p^* et q^* ($\chi^* = (p^*, q^*)$), la fonction E (k, χ^*), les coefficients de ces séries étant des fonctions périodiques en k, de période 1, continues et nulles pour k = 0, ± 1, ± 2, ...

Montrons que E (k, χ^*) $\in C^\infty$. En effet, d'après (II-17) regardant χ^*(k) comme une fonction de k et de χ (0) et écrivant
$\chi^*(k) = S^*$ (k, χ (0))
alors $S^* \in C^\infty$ puisque f (k) possède toutes ses dérivées continues et $\bar{\chi}$ et $\tilde{\chi}$ sont des fonctions analytiques de k et χ (0).

La fonction inverse χ (0) = S^{*-1} (k, χ^*(k)), définie pour $|\chi^*|$ suffisamment petit, appartient aussi à la classe C^∞ ($\tau_1 < k < \tau_2$) puisque det (A^k) $\neq 0$ (voir (II-19) et seq.)

Comme toutes les dérivées de f (k) s'annullent pour k = 0 et k = 1 alors il est possible de voir d'après (II-17), (II-20), (II-21) et

(II-22) que toutes les dérivées des coefficients du développement en série de $\varepsilon_1(k, \chi^*)$ (par rapport à χ^*) s'annullent aussi pour k = 0 et k = 1. Ces coefficients ont donc toutes les dérivées continues et nulles pour k = 0 et k = 1. D'autre part ε_1 (k, χ^*) appartient aussi à la classe C^∞ pour $|\chi^*|$ suffisamment petit et k $\in (\tau_1, \tau_2)$. Comme ε_1 s'annulle, avec toutes ses dérivées partielles pour k = 0 et k = 1, alors il est clair que E (k, χ^*) est aussi de classe C^∞ avec la même propriété aux instants k = 0, ± 1, ± 2...

Finalement, on peut définir le système différentiel

$$\frac{d\chi}{dk} = \overline{\mathcal{X}}(\chi) + E(k, \chi) \qquad -\infty < k < \infty \qquad \text{(II-26)}$$

ayant les propriétés suivantes :

I - le second membre est analytique par rapport à χ autour de l'origine $\chi = 0$ (p = q = 0) et $\chi(k) = 0$ est une solution triviale de (II-26)

II - E (k, χ) peut être représenté par des séries de puissances de p et q, à coefficients périodiques en k, de période 1, possédant des dérivées d'ordre quelconque continues, par rapport à k. Ces séries n'ayant que des termes de degré supérieur à L, E vérifie la relation :

$$\lim_{|\chi| \to 0} \frac{|E(k, \chi)|}{|\chi|^L} = 0$$

uniformément par rapport à k (les normes ici sont des normes Euclidiennes.)

III - Soit $\mathcal{V}^*$ un voisinage de l'origine du plan (p, q) tel que le Théorème d'Existence et d'Unicité soit vérifié pour $\chi(0) \in \mathcal{V}^*$ ($\chi(0)$ étant la condition initiale) et $\tau_1 < k < \tau_2$ avec $\tau_1 < -1$ et $\tau_2 > 1$. On peut encore supposer que les transformations T et T^{-1} soient définies dans ce voisinage ; alors si les points

$$T^{-M}(\chi(0)),\ T^{-M+1}(\chi(0)),\ \ldots\ T^{-1}(\chi(0)),\ \chi(0),$$
$$T(\chi(0)),\ \ldots,\ T^{N-1}(\chi(0)),\ T^N(\chi(0)) \quad (M, N \geq 1)$$

appartiennent tous à γ^{**}, et si $S^{*}(k ; \chi(0))$ est la solution de (II-26) passant par $\chi(0)$ à l'instant k = 0, nous pouvons écrire :

$$S^{*}(k ; \chi(0)) = T^{k}(\chi(0))$$

k = 1, 2, ..., N ou k = - 1, ..., - M.

La Proposition est donc démontrée.

Cette dernière propriété III permet d'affirmer que si le mouvement non perturbé ($\chi(k) = 0$) de (II-26) est stable (instable) au sens de Lyapunov alors le point fixe $\chi = 0$ de la transformation T sera aussi stable (instable) au sens de Lyapunov (étendu au cas discret) [28] .

Remarque :

Si T n'est pas du type pseudo-incommensurable, comme l'a démontré C. Lewis [20] , il existe un entier positif L (fini) tel que T^{L} sera du type pseudo-incommensurable. Il n'est pas difficile de voir que si T^{L} a un point fixe stable (instable) à l'origine, il en sera de même pour T.

La Proposition II- 1 peut être étendue aux cas à n dimensions sans difficultés théoriques.

Finalement on remarque que dans le cas réel à n dimensions, le système différentiel formel associé pourra être choisi réel (selon la détermination des exposants μ) si tous les multiplicateurs réels sont positifs. Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que A soit le carré d'une matrice réelle (μ , A selon la notation de la Déf. 2 ci-dessus) (voir aussi page 91). De cette manière T^{2} n'aura pas des multiplicateurs réels négatifs. Alors, si T ne satisfait pas les conditions de la proposition, permettant de définir le système différentiel réel D, il existe un certain entier J tel que T^{J} vérifie ces conditions, c'est-à-dire T^{J} est du type pseudo-incommensurable et tous ses multiplicateurs réels sont positifs.

II-3 - DEFINITION DE LA RECURRENCE ETUDIEE. CHANGEMENTS DE VARIABLES PRELIMINAIRES

La récurrence qui sera étudiée par la suite est une récurrence d'ordre N + 2 ($N \geq 1$), à variables réelles, du type

$$v_1 = F(v) \quad , \quad F(0) = 0$$

où $v \in R^{N+2}$ et $F : R^{N+2} \longrightarrow R^{N+2}$ est une fonction réelle et analytique autour de l'origine.

Les multiplicateurs à l'origine (point double) seront supposés tels qu'il existe une paire de multiplicateurs unitaires de multiplicité deux (comme dans le cas du premier Chapitre) et que tous les autres sont en module inférieurs à l'unité. Par un changement linéaire des variables cette récurrence peut être mise sous la forme

$$T_1 \begin{cases} x_1 = x + y + X(x, y, z) \\ y_1 = y + Y(x, y, z) \\ z_1 = Az + Z(x, y, z) \end{cases} \qquad \text{(I-31)}$$

où $x, y \in R$, $z \in R^N$; X, Y et Z sont des fonctions analytiques dont les développements en série ne contiennent que des termes de degré non inférieurs à deux.
A est une matrice N x N réelle dont les valeurs propres sont en module inférieurs à l'unité.

Nous montrons ci-après qu'il existe un changement non linéaire de variables, non singulier, permettant de ramener la forme (I-31) à une forme semblable, mais telle que Z (x, y, 0) ne contienne que des termes de degré supérieur à K en x et y, K étant arbitrairement élevé.

Comme il est montré dans l'Annexe B1, il existe une solution formelle v, de l'équation fonctionnelle :

$$A\, v(x,y) + Z\big[x,y,v(x,y)\big] - v\big[x+y+X(x,y,v), y+Y(x,y,v)\big] = 0 \qquad \text{(II-32)}$$

Elle est de la forme

$$v(x,y) = \sum_{i+j=2} \mathfrak{v}_{ij} \cdot x^i y^j \qquad \text{(II-34)}$$

(où $v \in R^n$, $\mathfrak{v}_{ij} \in \mathbb{R}^r$)

Définissant la fonction $v_k(x, y)$ par :

$$v_K(x, y) = \sum_{i+j=2}^{K} \mathfrak{v}_{ij}\, x^i\, y^j, \qquad \text{(II-35)}$$

alors le changement de variables :

$$z = \overline{z} + v_K(x, y) \qquad \text{(II-36)}$$

ramènera le système (I-31) à la forme proposée ci-dessus. En effet le nouveau système sera donné par :

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + \overline{X}(x, y, \overline{z}) \\ y_1 &= y + \overline{Y}(x, y, \overline{z}) \\ \overline{z}_1 &= A\overline{z} + \overline{Z}(x, y, \overline{z}) \end{aligned} \qquad \text{(II-37)}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{X}(x, y, \overline{z}) &= X\big[x, y, \overline{z} + v_k(x, y)\big] \\ \overline{Y}(x, y, \overline{z}) &= Y\big[x, y, \overline{z} + v_k(x, y)\big] \text{ et} \\ \overline{Z}(x, y, \overline{z}) &= A\, v_k(x, y) - v_k(x + y + \overline{X}, y + \overline{Y}) + Z(x, y, \overline{z} + v_k) \end{aligned}$$

Il est donc aisé de constater que

$$\overline{Z}(x,y,0) = A\, v_k(x,y) - v_k\big[x+y+X(x,y,v_k), y+Y(x,y,v_k)\big] + Z(x,y,v_k) \qquad \text{(II-38)}$$

Comme la fonction $v_k(x, y)$ est osculatrice à la solution formelle de (II-32) jusqu'au degré K alors (II-38) ne contient pas de termes de degré inférieur à K + 1. Utilisant la notation introduite à la page 79 on peut écrire :

$$\overline{Z}(x, y, 0) \sim O^K(x, y) \qquad \text{(II-39)}$$

II-4 - SYSTEME DIFFERENTIEL FORMEL ASSOCIE A LA RECURRENCE (II-31)

Supposons déjà effectués les changements de variables permettant la vérification de la relation (II-39) pour la récurrence (II-31). La puissance k-ième de T_1 peut s'exprimer par le système :

$$T_1^k \begin{cases} x_k = x + ky + X^{(k)}(x, y, z) \\ y_k = y + Y^{(k)}(x, y, z) \\ z_k = A^k z + Z^{(k)}(x, y, z) \qquad (k > 0, \text{ entier}) \end{cases} \qquad \text{(II-40)}$$

Les coefficients de $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$ (qui sont fonctions de k évidemment) sont trouvés à partir d'équations aux différences linéaires du premier ordre données par les relations :

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} - X^{(k)} &= Y^{(k)} + X(x + ky + X^{(k)}, y + Y^{(k)}, A^k z + Z^{(k)}) \\ Y^{(k+1)} - Y^{(k)} &= Y(x + ky + X^{(k)}, y + Y^{(k)}, A^k z + Z^{(k)}) \\ Z^{(k+1)} - AZ^{(k)} &= Z(x + ky + X^{(k)}, y + Y^{(k)}, A^k z + Z^{(k)}) \end{aligned} \qquad \text{(II-41)}$$

On peut noter que pour chaque k

$$Z^{(k)}(x, y, 0) \sim O^K(x, y)$$

En outre, les termes de $X^{(k)}$ et $Y^{(k)}$ qui sont indépendants de z, de degré non supérieur à K + 1, sont calculés à partir des coefficients de X (x,y, 0) et Y (x, y, 0) ; ces termes sont d'ailleurs indépendants de ceux de la fonction Z.

Supposons que T_1 est du type pseudo-incommensurable. Désignons par S_h (h = 1, 2, ..., n) les valeurs propres de A et afin d'obtenir un système différentiel formel à coefficients réels, faisons l'hypothèse supplémentaire que les valeurs propres réelles de A sont positives. On choisit alors les exposants $\mu_h = \ell n\, S$ de la façon suivante : $\mu_h = \ell n\, \lambda$

a) si λ_h est réel, μ_h sera la détermination réelle de $\mu_h = \ell n\, \lambda_h$

b) les λ_h complexes formant des paires conjuguées, les μ_h correspondants à chaque paire seront choisis complexes conjugués.

On obtient ainsi un système différentiel formel réel de la forme

$$D_1 \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dk} = y + \mathcal{X}\,(x, y, z) \\ \dfrac{dy}{dk} = \mathcal{Y}\,(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dk} = a_z + \mathcal{Z}\,(x, y, z) \end{array} \right. \qquad \text{(II-42)}$$

où $a^{(*)}$ est une matrice n x n réelle, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ ainsi que chaque composante de $\mathcal{Z}$, sont des séries formelles réelles de x, y et z ne contenant que des termes de degré supérieur à un.

D'autre part les termes de $\mathcal{Z}$ indépendants de z sont de degré non inférieur à K + 1 et les coefficients de $\mathcal{X}$ (x, y, 0) et $\mathcal{Y}$ (x, y, 0) correspondants aux termes de degré non supérieur à K + 1, sont calculés exclusivement à partir des coefficients de X (x, y, 0) et Y (x, y, 0).

Soient $\overline{\mathcal{X}}$, $\overline{\mathcal{Y}}$ et $\overline{\mathcal{Z}}$ les séries finies formées à partir de $\mathcal{X}$ $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ par troncature des termes de degré supérieur à K. D'après ce que

(*) $A = e^{a}$

l'on vient d'observer $\overline{x}(x, y, 0)$ et $\overline{y}(x, y, 0)$ sont aussi les séries finies obtenues par la troncature analogue des séries formelles qui définissent le système différentiel formel associé à la récurrence du second ordre :

$$T_R \begin{cases} x_1 = x + y + X(x, y, 0) \\ y_1 = y + Y(x, y, 0) \end{cases} \qquad \text{(II-43)}$$

Le système T_R sera appelé "système réduit". La section suivante montre comment le problème de stabilité de la récurrence (II-31) peut se réduire à la considération du même problème pour le système réduit T_R.

En outre, à l'aide de la Proposition II-1 étendue aux cas à N-dimensions ($N \geq 2$) nous avons un système différentiel réel à coefficients périodiques associé à T_1, de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dk} &= y + \overline{x}(x, y, z) + E_x(k, x, y, z) \\ \frac{dy}{dk} &= \overline{y}(x, y, z) + E_y(k, x, y, z) \qquad \text{(II-44)} \\ \frac{dz}{dk} &= a\,z + \overline{\zeta}(k, x, y, z) + E_z(k, x, y, z) \quad (N \geq 2) \end{aligned}$$

où (d'après la notation de la page) $E_x \sim O^K(x, y, z)$ $E_y \sim O^K(x, y, z)$ et $E_z \sim O^K(x, y, z)$; E_x, E_y, E_z sont de classe C^∞, périodiques par rapport à k (période = 1) ; $\overline{\zeta}(k, x, y, 0) \sim O^K(x, y)$, uniformément par rapport à k.

II-5 - STABILITE DE L'ORIGINE POUR LA RECURRENCE T_1 A N+2 DIMSIONS

Dans la section précédente il a été montré que si les hypothèses des pages 90 et 91 sur T_1 sont vérifiées, il existe un système différentiel à coefficients périodiques du type (II-44) associé à T_1. Le problème de sta-

bilité pour T_1 est ainsi ramené à l'étude de la stabilité du mouvement non perturbé $x = y = 0$, $z = 0$ de (II-44). Il serait alors possible de faire une extension des méthodes proposées par Lyapunov dans [14] pour l'étude du cas analogue mais à coefficients constants. Cependant, le système (II-44) satisfaisant les hypothèses d'un Théorème dû à Malkin [15] sur les cas critiques, son application au problème envisagé simplifie l'analyse.

II-5-1 - Théorème (Malkin)

Remarque : Ce Théorème est énoncé ci-dessous sous une forme plus particulière que celle trouvée dans [15] (voir aussi [28]).

Soit le système d'équations différentielles autonome

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}} &= Q\,\underline{y} + R\,\underline{x} + \underline{g}\,(\underline{y},\,\underline{x}) \\ \dot{\underline{x}} &= P\,\underline{x} + \underline{h}\,(\underline{y},\,\underline{x}) \end{aligned} \qquad \text{(M-1)}$$

où $\underline{y}$ est un vecteur à I dimensions et $\underline{x}$ un vecteur à J dimensions ; Q et P représentent des matrices. Les composantes de $\underline{g}$ et $\underline{h}$ sont développables en séries de Taylor par rapport à $\underline{y}$ et $\underline{x}$. Ces séries n'ont que des termes de degré non inférieur à deux . De plus supposons que :

- la solution banale $x = 0$ du système linéaire auxiliaire $\dot{x} = Px$ est asymptotiquement stable.
- les composantes de $\underline{h}\,(\underline{0},\,\underline{x})$ commencent par des termes de degré non inférieur à α
- la solution triviale $(\underline{y} = \underline{0})$ du système réduit $\dot{\underline{y}} = Q\underline{y} + \underline{g}(\underline{y},\,\underline{0})$ est stable, asymptotiquement stable ou instable selon la k-ième approximation (voir définition dans le glossaire).

Théorème : Si $k < \alpha$, la stabilité de la solution triviale $(\underline{x}=\underline{y}=0)$ du système complet (M-1) est fixée par la stabilité de la solution $\underline{y} = 0$ du système réduit.

Comme conséquence du Théorème précédent si le mouvement non-perturbé $x = y = 0$ de

$$\frac{dx}{dk} = y + \overline{X}(x,y,0) \quad ; \quad \frac{dy}{dk} = \overline{Y}(x,y,0) \qquad \text{(II-49)}$$

est stable ou instable selon la K_1-ième approximation, $K_1 \leqslant K + 1$, alors le mouvement non perturbé de (II-44), $x = y = 0$, $z = \underline{0}$ sera aussi stable ou instable, respectivement. La section qui suit montre que si le système réduit T_R a la stabilité du point double $x = y = 0$ définie par ses termes de degré non supérieur à K_1, alors le mouvement non perturbé $x = y = 0$ de (II-49) sera stable ou instable selon la K_1-ième approximation. Il est donc possible de réduire l'analyse de la stabilité de la récurrence T_1, à celle du système réduit (II-49) lorsque les valeurs propres réelles de T_1 sont positives, T_1 est du type pseudo-commensurable, et la stabilité de $x = y = 0$ pour le système réduit est définie par ses termes de degré non supérieur à K_1 ($\leqslant K + 1$)

II-5-2 - Stabilité selon la K_1-ième approximation, pour le système (II-49)

Supposons que le système réduit soit du type "algébrique" (voir § I-2-4), et que la stabilité de l'origine soit définie par les termes de degré non supérieur à K_1.

La stabilité ou l'instabilité du système (II-49) selon la K_1-ième approximation (au sens de Malkin [15 - 20]) se démontre de la même façon que celle utilisée pour déterminer la stabilité du système (I-39), problème traité lors de l'étude des cas du § I-2-4. Ici ce système prend la forme

$$\frac{dx}{dk} = y + \overline{X} + E_1(x, y, k) \quad , \quad \frac{dy}{dk} = \overline{Y} + E_2(x, y, k)$$

où E_1 et E_2 sont des perturbations arbitraires pourvu qu'elles satisfassent une relations du type

$$|E_1| + |E_2| \leq a\,|(x, y)|^{K_1+1} \quad , \quad a > 0 \qquad \text{(II-50)}$$

pour $|(x, y)| \leq \delta$, δ étant une certaine valeur positive, et pour $k \geq 0$ (k est ici employé à la place de t).

Les autres cas algébriques dont l'instabilité de l'origine a été déterminée à partir de l'existence de courbes invariantes α , correspondent aussi à des systèmes du type (II-49) dont l'instabilité est indépendante des perturbations telles que E_1 et E_2 ci-dessus ; pour K_1 suffisamment grand.

En effet, considérons le système "perturbé" (par rapport au cas $E_1 = E_2 = 0$) :

$$\tilde{D}_R \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dk} = y + \overline{x}\,(x, y, 0) + E_1\,(x, y, k) \\ \dfrac{dy}{dk} = \overline{y}\,(x, y, 0) + E_2\,(x, y, k) \end{cases} \qquad \text{(II-51)}$$

E_1, E_2 satisfaisant une relation du type (II-50).

Supposons que le système réduit T_R est déjà sous la forme réduite (I-6). Dans ce cas nous pouvons écrire (voir Annexe A 2)

$$\overline{y}\,(x, y, 0) = \Psi_{n0}\, x^n + O^n\,(x, y)$$

et par conséquent si $|y| \leq |x|$ et $|x| \leq \rho$ le signe de $\dfrac{dy}{dk}$ est donné par le terme $\Psi_{n0}\, x^n$ (ρ suffisamment petit).

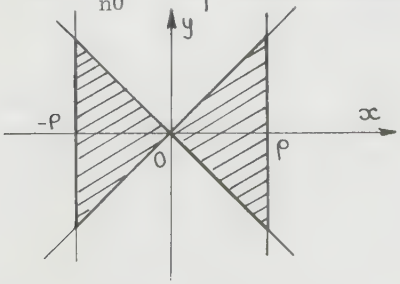


Figure II-1

En d'autres termes si (x,y) se situe dans la région fermée hachurée de la figure II-1 (ci-contre) nous avons

$$\left(\frac{dy}{dk}\right)_{\tilde{D}_R} \cdot \Psi_{n0}\, x^n > 0 \;;(x,y) \neq (0,0) \qquad \text{(II-52)}$$

Nous avons ici essentiellement deux cas d'instabilité à examiner : le cas où une courbe α est située dans le 1er quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$) et le cas où une courbe α est située dans le 4ème quadrant ($x \geq 0$, $y \leq 0$). Les autres cas sont évidemment réductibles aux précédents par la substitution $x \longrightarrow -x$, $y \longrightarrow -y$ (qui ne modifie pas la partie linéaire de T_R).

Supposons maintenant $K_1 = \max(m, n)$ et définissons les systèmes $\hat{D}_R$ et $\check{D}_R$:

$$\hat{D}_R \begin{cases} \dfrac{dx}{dk} = y + \overline{x}(x, y, 0) - E(x, y) \\ \dfrac{dy}{dk} = \overline{y}(x, y, 0) + E(x, y) \end{cases} \qquad \text{(II-53)}$$

$$\check{D}_R \begin{cases} \dfrac{dx}{dk} = y + \overline{x} - E(x, y) \\ \dfrac{dy}{dk} = \overline{y}(x, y, 0) - E(x, y) \end{cases} \qquad \text{(II-54)}$$

avec $E(x, y) = \left(|x|^{n+1} + |y|^{n+1}\right).\ \overline{a}\ ,\ \overline{a} > 0$.

Il est clair qu'il existe un certain $\overline{a}$ tel que

$$E > |E_1| \qquad \text{et} \qquad E > |E_1| \qquad (k \geq 0)$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'origine; nous pouvons alors écrire les relations

$$\left(\frac{dx}{dk}\right)_{\hat{D}_R}, \left(\frac{dx}{dk}\right)_{\check{D}_R} < \left(\frac{dx}{dk}\right)_{\tilde{D}_R} ; \left(\frac{dy}{dk}\right)_{\hat{D}_R} > \left(\frac{dy}{dk}\right)_{D_R} > \left(\frac{dy}{dk}\right)_{\check{D}_R} \qquad \text{(II-55)}$$

Considérons premièrement les cas où T_R a une courbe invariante α dans le premier quadrant. Dans ce cas on a nécessairement $\Psi_{n0} > 0$.

Dans l'Annexe B 2, il est montré que $\hat{D}_1$ aura aussi une courbe invariante α , $\hat{C}$, dans le même quadrant.

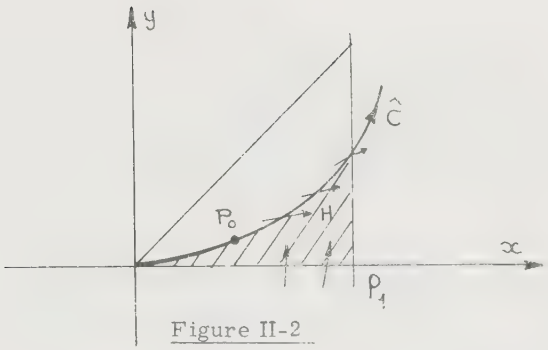


Figure II-2

Choisissant un certain $\rho_1 > 0$, suffisamment petit, la région hachurée H de la figure II-2 aura les propriétés suivantes :

a) Si $(x,y) \in H$ et $x \neq 0$

$$\left(\frac{dy}{dk}\right)_{\tilde{D}_R} > 0$$

b) Si $(x, y) \in \hat{C}$, et $x \neq 0$ alors

$$0 < \left(\frac{dx}{dk}\right)_{\hat{D}_R} < \left(\frac{dx}{dk}\right)_{\tilde{D}_R} \qquad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{dk}\right)_{\hat{D}_R} > \left(\frac{dy}{dk}\right)_{\tilde{D}_R}$$

Nous pouvons montrer facilement que la solution de $\hat{D}_R$ passant par un point $P_0 \in \hat{C}$, aussi proche de l'origine que l'on veut pour $k = 0$ traversera la droite $x = \rho_1$ pour k suffisamment grand. Ceci implique l'instabilité du mouvement non perturbé de $\tilde{D}_R$.

Si on considère maintenant une courbe α au 4ème quadrant, alors nécessairement $\psi_{n0} < 0$. Par un raisonnement analogue à celui du cas précédent et à l'aide d'une courbe α de $\check{D}_1$ située au même quadrant, nous démontrons aussi l'instabilité du mouvement non perturbé de $\hat{D}_1'$

Les résultats ci-dessus permettent de conclure que :

"Si la stabilité du point double $x = y = 0$ de T_R est définie par les termes de degré non-supérieur à K_1 alors le mouvement non perturbé $x = y = 0$ de (II-49) aura sa stabilité définie par la K-ième approximation".

Par le Théorème du paragraphe II-5-1 (voir page 94) il est donc possible d'étudier la stabilité du système complet T_1, ayant un système différentiel associé du type (II-44), à l'aide du système réduit T_R. Ceci est mieux précisé par la proposition suivante.

Proposition II-2 :

"Si à la récurrence (II-31) il est possible d'associer un système différentiel du type (II-44), moyennant la transformation (II-36), alors le problème de stabilité de T_1 au point $x = y = 0$, $z = \underline{0}$ est équivalent à celui de T_R au point $x = y = 0$ lorsqu'il peut être résolu à partir des termes de degré non supérieur à $K + 1$ dans les seconds membres de (II-43)".

D'après la remarque à la fin du § II-2-2, si T_1 ne vérifie pas l'hypothèse de cette proposition alors il existe un certain entier $J > 0$ tel qu'elle sera satisfaite par T_1^J. Par ailleurs, si la relation (II-39) est valable pour T_1 alors T_1^J sera de la forme (II-40) où $k = J$ et

$$Z^{(J)}(x, y, 0) \sim O^K(x, y)$$

Le système réduit le T_1^J , étant noté par $T_R^{(J)}$, sera défini par :

$$T_R^{(J)} \begin{cases} x_1^{(J)} = x + Jy + X^{(J)}(x, y, 0) \\ y_1^{(J)} = y + Y^{(J)}(x, y, 0) \end{cases}$$

On peut constater que la relation suivante est valable :

$$T_R^J \overset{K+1}{\sim} T_R^{(J)}$$

Ceci implique que si $x = y = 0$ est un point double de T_R dont la stabilité est définie par les termes de degré non supérieur à $K + 1$, des expressions (II-43), il en est de même pour le point double $x = y = 0$ de $T_R^{(J)}$. De cette façon les problèmes de stabilité du point double $x = y = 0$ de $T_R^{(J)}$ ou de T_R sont équivalents.

Les conditions de la Proposition II-2 peuvent donc être affaiblies, ceci se traduisant par la Proposition suivante :

Proposition II-3 :

"Considérons la récurrence T_1 définie par les expressions (I-31). Soit le système réduit défini par

$$T'_R : x_1 = x+y+X(x,y,v_k(x,y)) \ , \ y_1 = y+Y(x,y,v_k(x,y)) \qquad (II-56)$$

où v_k est la fonction vectorielle donnée par (II-35). Alors, si la stabilité du point double $x = y = 0$ de T'_R est définie par les termes de degré non supérieur à $K + 1$, ce point sera soit asymptotiquement stable soit instable. Dans ce cas le point double $x = y = 0$, $z = \underline{0}$, de T_1 sera aussi asymptotiquement stable ou instable, respectivement".

On voit ainsi que la Proposition II-3 n'impose sur les valeurs propres de A d'autres conditions que celle considérée dans tout le chapitre ; i.e., qu'elles soient à l'intérieur du cercle unitaire du plan complexe (et non nulles).

II-6 - EXEMPLE

Pour illustrer l'application de la théorie développée on étudie la récurrence du 4ème ordre suivante :

$$\begin{cases} x_1 = x + y \\ y_1 = y + \alpha (z^{(1)} + z^{(2)})x - x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^{(1)} = \rho (\cos\theta \; z^{(1)} + \sin\theta \; z^{(2)}) + xy \\ z_2^{(1)} = \rho (-\sin\theta \; . z^{(1)} + \cos\theta \; z^{(2)}) + \beta \, y \, z^{(1)} \qquad (|\rho| < 1) \end{cases} \tag{II-56}$$

(variables et constantes réelles).

Posons $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$. D'après l'Annexe B 1 (B1-5) on voit aisément que

$$Z_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Z_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Z_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alors

$$\mathcal{V}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho a-1 & \rho b \\ \rho b & \rho a-1 \end{bmatrix} . \mathcal{V}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho a-1 & \rho b \\ \rho b & \rho a-1 \end{bmatrix}^2 . \mathcal{V}_{02} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit,

$$\mathcal{V}_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A^2+B^2} \\ -\frac{A}{A^2+B^2} \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad A = \rho a - 1 \quad , \quad B = \rho b$$

On peut alors écrire (voir Annexe B 1 (B1-3)):

$$^{(2)}v(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A^2+B^2} \\ -\frac{A}{A^2+B^2} \end{bmatrix} xy + \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{02}^{(1)} \\ \mathcal{V}_{02}^{(1)} \end{bmatrix} y^2 \tag{II-57}$$

Si dans l'expression de y_1 on pose

$$z^{(1)} = -\frac{B}{A^2+B^2} xy + \mathcal{V}_{02}^{(1)} y^2 \quad \text{et} \quad z^{(2)} = -\frac{A}{A^2+B^2} xy + \mathcal{V}_{02}^{(2)} y^2$$

on obtient le système réduit

$$x_1 = x + y \quad , \quad y_1 = y - \alpha \left(\frac{A+B}{A^2+B^2} \right) x^2 y - x^3 + (v_{02}^{(1)} + v_{02}^{(2)}) y^2 x$$

Par un changement de variables du type (I-2) (Ch. I) on obtient la forme réduite (I-6). On peut d'ailleurs constater facilement que

$$m=n=3, \quad \Psi_{30} = -1 \quad \text{et} \quad \Psi_{03} = -\frac{(A+B)}{3(A^2+B^2)}$$

D'après les critères S1 et I3 (Sec. I-3) on peut affirmer pour le système réduit qu'il y a :

a) Stabilité asymptotique si

$$L = -\frac{(A+B)\alpha}{(A^2+B^2)} < -3 \quad \text{et} \tag{II-58}$$

b) Instabilité si $L > -3$ (II-59)

(Si $L = 3$ il faut considérer les termes de degré supérieur de $v(x, y)$).

La Proposition II-3 permet d'étendre ces conditions à la récurrence complète (II-56). (Dans la Proposition, $K = 2$, pour cet exemple).

L peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$L = \frac{1 - \rho\,(a+b)}{1 + \rho\,(\rho - 2a)} \tag{II-60}$$

$1 + \rho(\rho - 2a) > 0$ si $|\rho| < 1$ et $|a| < 1$ ce qui est vrai par hypothèse.

	ρ^{-1}	a	b	α	L	fig.
Stable	1.1	0.5	0.866	+ 12,5	- 3,29	II-3
	1.1	- 0.866	0.5	- 9	- 3.53	II-4
	1.05	0.866	- 0.5	- 2	- 6.07	II-5
Instable	1.1	0.5	0.866	- 5	1.318	II-6
	1.1	0.5	0.866	+ 5	- 1.318	II-7
	1.1	- 0.866	0.5	- 2	- 0.78	II-8

Tableau II-1 - Valeurs de paramètres pour les figures,

$\beta = 1$

Nous avons tracé dans le plan x, y les valeurs successives prises par ces variables, sur quelques trajectoires de (II-56). Par exemple les conditions initiales correspondantes à la figure II-1 sont :

$$x_0 = -5.\ 10^{-2}\ ,\ y_0 = 3.10^{-3}\ ,\ z_0^{(1)} = z^{(2)} = 10^{-2} \qquad \text{et}$$

$$x_0 = 6.10^{-3}\ ,\ y_0 = 6.10^{-3}\ ,\ z_0^{(1)} = z^{(2)} = 2.10^{-2}$$

(deux trajectoires).

Pour mieux discerner la séquence des points, deux itérations successives sont liées par un segment de droite.

Le cas L = - 3,29 présente une convergence vers l'origine particulièrement lente, tandis que le cas L = - 6,07 après une période transitoire assez longue (dû au fait que ρ est très voisin de 1), spirale vers l'origine plus rapidement.

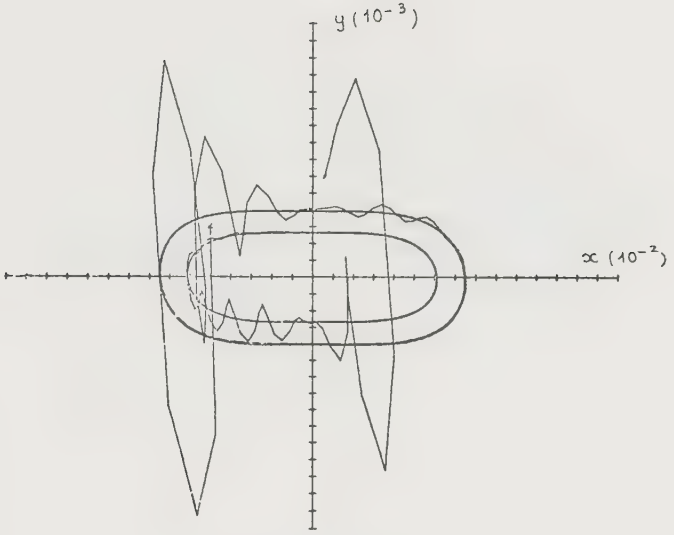


Figure II-3

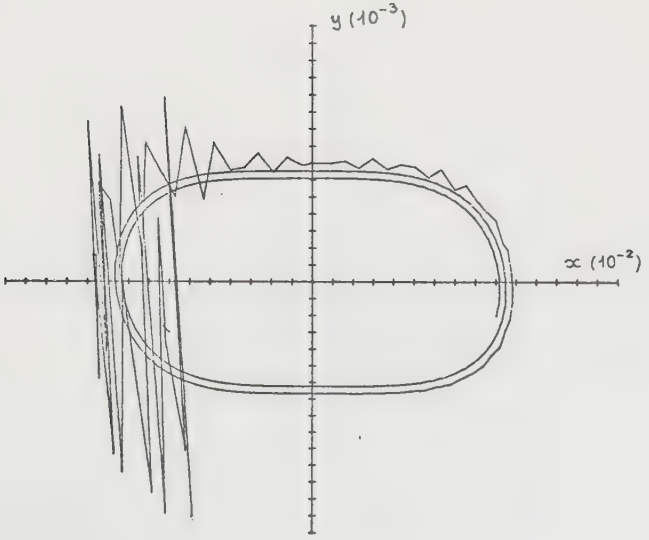


Figure II-4

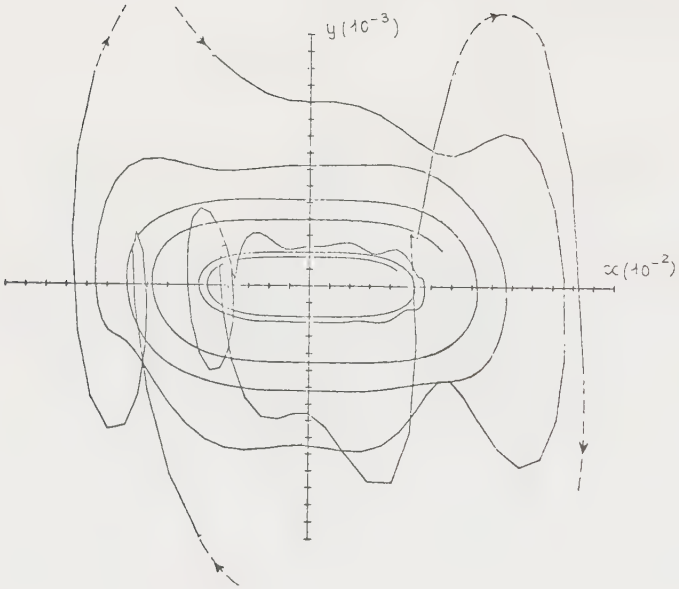
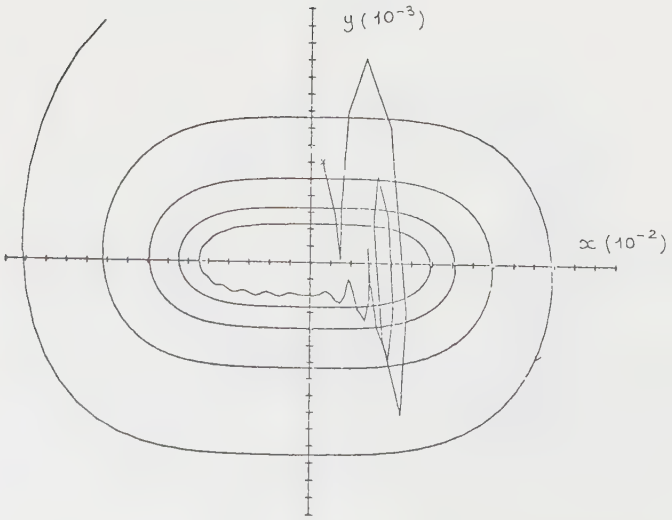


Figure II-5



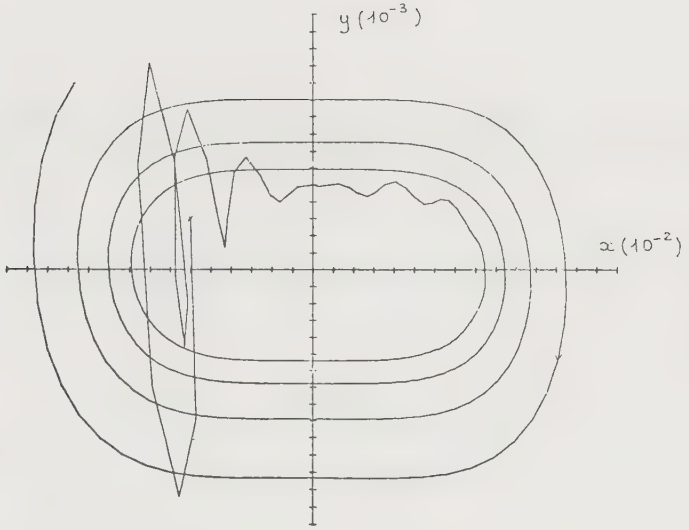


Figure II-7

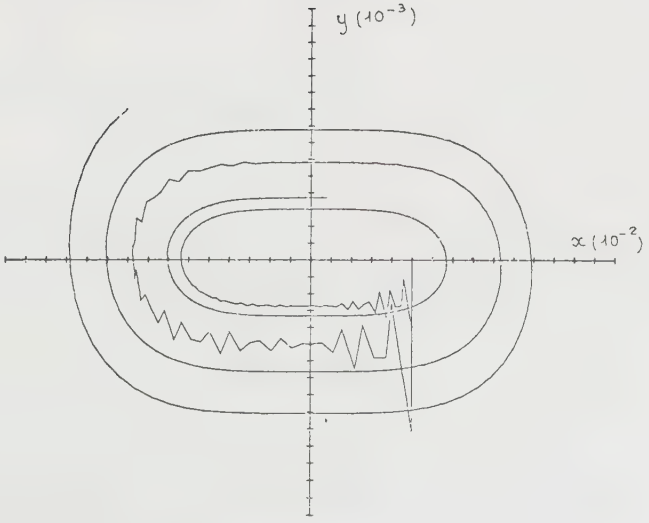


Figure II-8

II-7 - CAS CRITIQUE GENERAL POUR LES RECURRENCES AUTONOMES

(Sans multiplicateur nul au point double considéré)

Une généralisation de la méthode précédente peut être faite pour les cas critiques où il y a un ou plusieurs multiplicateurs (à l'origine) unitaires en module, tous les autres étant, non nuls et inférieurs à l'unité, en module.

La récurrence considérée ici, est de la forme :

$$x_1 = C x + \chi(x,z) \; ; \; z_1 = A z + \mathcal{Z}(x,z) \qquad \text{(II-61)}$$

où $x, x_1 \in R^M$; $z_1, z \in R^N$; C est une matrice M x M ; A est une matrice N x N ; $\chi, \mathcal{Z}$ sont des fonctions analytiques du type $\chi : R^M \times R^N \longrightarrow R^M$ et $\mathcal{Z} : R^M \times R^N \longrightarrow R^N$. Les valeurs propres de C sont supposées unitaires, en module, et celles de A, non nulles et inférieures à l'unité, en module. On suppose aussi que χ et $\mathcal{Z}$ n'ont pas de termes linéaires ou constants.

Comme pour le cas étudié dans les sections précédentes ($C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) il est possible de trouver une substitution du type

$$z = \bar{z} + v_K(x) \qquad (z_1 = \bar{z}_1 + v_K(x_1)) \qquad \text{(II-62)}$$

telle que le nouveau système

$$\begin{cases} x_1 = C x + \bar{\chi}(x, \bar{z}) \\ \bar{z}_1 = A \bar{z} + \bar{\mathcal{Z}}(x, \bar{z}) \end{cases} \qquad \text{(II-63)}$$

satisfasse la relation

$$\bar{\mathcal{Z}}(x, 0) = 0^K(x) \qquad \text{(II-64)}$$

i.e., $\bar{\mathcal{Z}}(x,0)$ n'a que des termes de degré supérieur à K.

L'existence d'une transformation (II-62) est une conséquence de l'existence d'une série formelle du type :

$$v(\chi) = {}^{(2)}v(\chi) + {}^{(3)}v(\chi) + \ldots \qquad \text{(II-65)}$$

où ${}^{(j)}v(\chi)$ sont des formes d'ordre j en les variables $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(N)}$, satisfaisant formellement l'équation fonctionnelle

$$A\,v(\chi) + Z\left[\chi, v(\chi) - v(C\chi + \mathcal{X}(\chi, v(\chi))\right] = 0 \qquad \text{(II-66)}$$

Ceci est démontré à la fin de l'Annexe B 1. On peut ajouter encore que la solution du type (II-65) est unique. Définissons maintenant

$$v_K(\chi) = \sum_{i=2}^{K} {}^{(i)}v(\chi) \qquad \text{(II-67)}$$

Il est alors aisé de constater la validité de (II-64).

Considérons le système "réduit" défini par :

$$\chi_1 = C\chi + \mathcal{X}(\chi, v_K(\chi)) \qquad \text{(II-68)}$$

Supposant la transformation (II-68) du type pseudo-incommensurable et que C n'a pas des valeurs propres réelles négatives, on peut lui associer une équation différentielle formelle réelle du type :

$$\frac{d\chi}{dk} = \mathfrak{X}(\chi) \qquad \text{(II-69)}$$

où $\mathfrak{X}$ a comme composantes $\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{X}^{(M)}$ qui sont des séries formelles en $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(M)}$, sans termes constants. Si $\mathfrak{X}_{K+1}$ représente les séries précédentes, tronquées à partir destermes de degré K + 2, le système

$$\frac{d\chi}{dk} = \mathfrak{X}_{K+1}(\chi) \qquad \text{(II-70)}$$

est naturellement analytique. Par l'intermédiaire de la Proposition II-1 on peut affirmer que si la solution triviale de (II-70) est asymptotiquement stable (ou instable) selon la (K+1)-ième approximation , alors le point double

$\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \ldots = \chi^{(M)} = Z^{(1)} = Z^{(2)} = \ldots = Z^{(N)} = 0$ est aussi asymptotiquement stable (ou instable).

Nous pouvons par exemple utiliser ce résultat pour l'étude des cas critiques où $M = 2$ et les valeurs propres de C sont du type $e^{\pm j\varphi}$, avec φ commensurable avec 2π (Dans [26], cette situation est excluelorsqu'un cas d'exception est possible).

ANNEXE B 1

EQUATIONS FONCTIONNELLES (II-32) et(II-66)

Réécrivant l'équation (II-32) on a :

$$A\, v(x,y) + \mathcal{Z}(x,y,v(x,y)) - v\left[x+y+X(x,y,v), y+Y(x,y,v)\right] = 0 \qquad \text{(B 1-1)}$$

Il est possible de déterminer une solution formelle du type

$$v(x,y) = \sum_{i+j=2}^{\infty} \mathcal{V}_{ij}\, x^i\, y^j \qquad \text{(B 1-2)}$$

(voir (II-34)). En effet, si on réécrit v (x,y) sous la forme

$$v(x,y) = {}^{(2)}v(x,y) + {}^{(3)}v(x,y) + \ldots \qquad \text{(B 1-3)}$$

où les ${}^{(k)}v$ ($k = 2,3,\ldots$) sont composés de formes d'ordre k, c'est-à-dire que chaque composante du vecteur ${}^{(i)}v$ est un polynome homogène de degré i en x et y, les identités suivantes doivent être vérifiées

$$\begin{aligned}
&A\, {}^{(2)}v(x,y) - {}^{(2)}v(x+y,y) + {}^{(2)}\mathcal{Z}(x,y,0) = 0\\
&A\, {}^{(3)}v(x,y) - {}^{(3)}v(x+y,) + {}^{(3)}\mathcal{F}(x,y,0) = 0\\
&\text{----------}\\
&A\, {}^{(k)}v(x,y) - {}^{(k)}v(x+y,y) + {}^{(k)}\mathcal{F}(x,y,0) = 0
\end{aligned} \qquad \text{(B 1-4)}$$

où ${}^{(2)}\mathcal{Z}$ est la somme des termes du second degré de $\mathcal{Z}(x,y,0)$ et les ${}^{(k)}\mathcal{F}$ sont des formes d'ordre k obtenues à partir des coefficients $\mathcal{V}_{ij}$ ($i+j < k$) et des coefficients des termes de degré non supérieur à k de $\mathcal{Z}(x,y,z)$, $X(x,y,z)$ et $Y(x,y,z)$.

A partir des identités (B 1-4) on peut déterminer les coefficients $\mathcal{V}_{ij}$ de (B 1-2) (de façon unique) de la manière suivante :

Pour i + j = 2 on obtient facilement les systèmes algébriques suivants, à partir de la première des relations (B 1-4) :

$$(A-I)\ \mathcal{V}_{20} = \mathcal{Z}_{20}\ ,\quad (A-I)\ \mathcal{V}_{11} = \binom{2}{1}\mathcal{V}_{20} + \mathcal{Z}_{11} \qquad (\star)$$

$$(A-I)\ \mathcal{V}_{02} = \binom{2}{2}\mathcal{V}_{20} + \binom{1}{1}\mathcal{V}_{11} + \mathcal{Z}_{02} \qquad \text{(B 1-5)}$$

$(\mathcal{Z}_{20}\, x^2 + \mathcal{Z}_{11}\, xy + \mathcal{Z}_{02}\, y^2 = {}^{(2)}\mathcal{Z}(x, y, 0)$.

De façon analogue on déduit des autres relations (B 1-4), successivement, pour i + j = L (L = 3, 4, 5, ...), les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} &(A-I)\ \mathcal{V}_{L,0} = \mathcal{F}^{\circ}_{L0} \\ &(A-I)\ \mathcal{V}_{L-1,1} = \binom{L}{1}\mathcal{V}_{L,0} + \mathcal{F}^{\circ}_{L-1,1} \\ &\text{----------} \\ &(A-I)\ \mathcal{V}_{L-j,j} = \sum_{k=0}^{j-1}\binom{L-k}{j+k}\mathcal{V}_{L-k,k} + \mathcal{F}^{\circ}_{L-j,j}\ \ (L-j=i) \end{aligned} \qquad \text{(B 1-6)}$$

$$j = 1, 2, \ldots L$$

Comme l'on suppose que les valeurs propres de A sont toutes inférieures à l'unité, bien évidemment la matrice (A-I) est régulière. Par conséquent les solutions des systèmes existent et déterminent de façon unique les vecteurs $\mathcal{V}_{ij}$ (i+j = 2,3, ...). Ceci démontre l'existence de la solution formelle du type (B 1-2).

Considérons maintenant le cas plus général de la Section II-7 (équation (II-66)) :

$$A\, v(x) + \mathcal{Z}(x, v(x)) - v(C x + \mathcal{X}(x, v(x)) = 0 \qquad \text{(B 1-7)}$$

$(\star)\quad \binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$

Il existe toujours un changement linéaire de variables du type $\chi = B\xi$ tel que $B^{-1} C B$ soit de la forme

$$\mathcal{J} = B^{-1} C B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \delta_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \delta_{M-1} \\ 0 & & & \lambda_M \end{pmatrix} \qquad \delta_1 = 1 \text{ ou } 0$$

(B peut être complexe, mais les valeurs propres imaginaires de C apparaissent par paires conjuguées).

Posant $v(B\xi) = u(\xi)$ nous avons d'après (B 1-7)

$$Au(\xi) + \mathcal{F}(B\xi, u(\xi)) - u(\mathcal{J}\xi + \chi(B\xi, u(\xi))) = 0 \qquad \text{(B 1-8)}$$

Comme précédemment écrivons $u(\xi)$ sous la forme :

$$u(\xi) = {}^{(2)}u(\xi) + {}^{(3)}u(\xi) + \ldots \qquad \text{(B 1-9)}$$

où ${}^{(m)}u(\xi)$ est une forme d'ordre m dans les variables $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \ldots \xi^{(M)}$

Pour chaque $m = 2, 3, \ldots$ il faut obtenir des identités du type :

$$A\,{}^{(m)}u(\xi) - {}^{(m)}u(\mathcal{J}\xi) = \mathcal{F}_m(\xi)$$

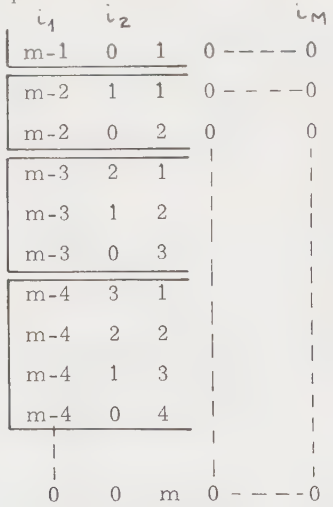
où les $\mathcal{F}_m$ sont des formes d'ordre m. Pour m = 2 bien entendu, $\mathcal{F}_2 = {}^{(2)}\mathcal{F}(B\xi, u(\xi))$ et pour m supérieur à 2 les formes $\mathcal{F}_m$ sont calculées à partir des ${}^{(j)}u(\xi)$ $(j < m)$ et des fonctions connues dans (B 1-8). Posant

$${}^{(m)}u(\xi) = \sum_{i_1+i_2+\ldots i_M=m} \mathcal{V}_{i_1,i_2,\ldots,i_M} \xi^{(1)^{i_1}} \xi^{(2)^{i_2}} \ldots \xi^{(M)^{i_M}}$$

nous pouvons déterminer les vecteurs $\mathcal{V}$ successivement dans l'ordre suivant :

On commence par $i_1 = m$ ($i_2 = i_3 = \ldots i_M = 0$), les autres coefficients s'en déduisent dans l'ordre indiqué ci-dessous.

i_1	i_2				i_M
m	0	0	0	- - - - -	0
m-1	1	0	0		
m-2	2	0	0	- - - -	0
0	m	0	0		0



etc...

La condition essentielle, suffisante pour l'existence et l'unicité de la série $u(\xi)$, est que toutes les matrices :

$$A - (\lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \ldots \lambda_M^{i_M}) I$$

soient régulières. Or, ceci est conséquence des hypothèses faites sur A et C.

ANNEXE B 2

COURBES INVARIANTES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS $\hat{D}_R$ (II-53) et $\check{D}_R$ (II-54)

Nous pouvons définir les transformations ponctuelles $\hat{T}_R$ et $\check{T}_R$ associées à $\hat{D}_R$ et $\check{D}_R$ respectivement, liant l'état de chaque système pris à un instant t_0 à celui pris à l'instant $t_0 + 1$. Il est évident que $\hat{T}_R$ et $\check{T}_R$ seront de la forme

$$\hat{T}_R \begin{cases} x_1 = x + y + \hat{\varphi}_{\ell 0} x^{\ell} + \dots \\ y_1 = y + \psi_{n0} x^{n} + \dots \end{cases} \qquad \text{(B 2-1)}$$

$$\check{T}_R \begin{cases} x_1 = x + y + \check{\varphi}_{\ell 0} x^{\ell} + \dots \\ y_1 = y + \psi_{n0} x^{n} + \dots \end{cases} \qquad \text{(B 2-2)}$$

$$\ell = \begin{cases} m & \text{si} \quad m < n+1 \\ n+1 & \text{si} \quad m \geq n+1 \end{cases}$$

et

$$\check{\varphi}_{\ell 0} = \hat{\varphi}_{\ell 0} \begin{cases} = \varphi_{m0} & \text{si} \quad m < n+1 \\ = \varphi_{m0} - \bar{a} & \text{si} \quad m = n+1 \\ = -\bar{a} & \text{si} \quad m > n+1 \end{cases}$$

lorsque $x, y, x_1, y_1 \geq 0$ ou lorsque $x, -y, x_1, -y_1 \geq 0$ (noter que $E(x,y)$ dans (II-53) et (II-54) n'est pas nécessairement analytique ; il faut en général considérer les restrictions de $\hat{T}_R$ et $\check{T}_R$ au premier ou au quatrième qua-

drant où elles sont données par des fonctions analytiques).

Il est maintenant facile de voir que le système réduit T_R étant déjà sous la forme

$$T_R \begin{cases} x_1 = x + y + \varphi_{m0}\, x^m + \dots \\ y_1 = y + \psi_{n0}\, x^n + \dots \end{cases} \qquad \text{(B 2-3)}$$

alors, s'il existe une courbe α de T_R au premier quadrant ($\psi_{n0} > 0$ nécessairement) il en sera de même pour $\hat{T}_R$. En effet ceci peut être vérifié sur les formules (I-13), (I-14) et (I-15) pour les divers cas possibles.

Pareillement si T_R a une courbe α au quatrième quadrant, $\hat{T}_R$ en aura une aussi.

CHAPITRE III

TRANSFORMATION PONCTUELLE POLYNOMIALE PRESERVANT L'AIRE ET OSCULATRICE A UNE TRANSFORMATION ANALYTIQUE ASSOCIEE A UN SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF

III-1 - INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques conservatifs à deux degrés de liberté peuvent s'étudier à l'aide d'une transformation ponctuelle associée. Il s'agit ici d'une transformation plane préservant l'aire. Cette méthode a été développée par Poincaré [1] et plus tard, par G.D. Birkhoff [2]. Considérant le voisinage d'une trajectoire périodique d'un tel système, il est possible d'écrire les équations différentielles du mouvement sous la forme : [30]

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q} \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p}, \qquad \text{(III-1)}$$

où la trajectoire $p = q = 0$ correspond au mouvement périodique dans l'espace (p, q, t) et H est périodique en t, de période 2π par exemple, de façon que t peut aussi être considéré comme une variable angulaire.

Il est connu [1 - 2] qu'il est possible d'associer à (III-1) une transformation ponctuelle liant les valeurs de p, q à un certain instant $t = 2\pi n$, à celles à l'instant $t = 2\pi (n + 1)$, les dernières étant représentées par p_1, q_1. Nous avons donc, une transformation de la forme :

$$M : \quad p_1 = P(p, q) \quad ; \quad q_1 = Q(p, q) \qquad \text{(III-2)}$$

Si H est une fonction analytique, M est biunivoque et analytique dans un voisinage de l'origine $p = q = 0$ du plan (p, q), qui correspond au mouvement périodique considéré. De plus, M préserve l'aire (Jacobien fonctionnel J unitaire).

Cependant, d'un point de vue pratique, les expressions analytiques ou algébriques de P et Q sont en général inconnues. Pour quelques cas spéciaux il est possible de les écrire sous forme explicite :

Exemple 1 [31] : Considérant le système

$$\frac{dx}{dt} = y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = - x + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta (t - n \tau) - x^2 \qquad \text{(III-3)}$$

où δ (t) est la fonction de Dirac, alors les expressions correspondantes à (III-2) sont

$$x_1 = x \cos \tau + (y + x^2) \sin \tau, \quad y_1 = - x \sin \tau + (y + x^2) \cos \tau$$

Ici, (x, y) est l'état à un instant $n \tau^-$ et (x_1, y_1) l'état à l'instant $(n + 1) \tau^-$.

Exemple 2 [32] :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = - x + f (t) x^2 \qquad \text{(III-4)}$$

où f (t) est une fonction périodique et constante par morceaux, le nombre de sous intervalles à f constant étant fini pour une période.

A l'aide des fonctions elliptiques [32] il est possible d'obtenir analytiquement la solution de (III-4) sur chaque sous intervalle avec f constant. La transformation totale est le produit des transformations partielles et le résultat est en général très complexe.

Les équations (III-3) et (III-4) ont par exemple, un intérêt, dans l'étude du mouvement transversal d'une particule dans un accelérateur à gradient alterné [26 – 44] .

Le but de ce chapitre est de construire une transformation ponctuelle préservant l'aire, qui représente le comportement des solutions de l'équation (III-1) dans un certain voisinage de la trajectoire périodique p = q = 0, avec une certaine précision.

En général, pour une étude strictement locale, on n'a pas besoin des expressions "complètes" de P et Q, mais seulement de quelques termes de leurs développements en série. Dans [33] (voir aussi [53]) une

méthode de calcul des termes initiaux de ces développements a été proposée pour le cas d'une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)\, P(x) \qquad \text{(III-5)}$$

où f (t) est une fonction périodique et constante par morceaux et $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$ (α , β constantes).

La considération des termes de degré supérieur devrait améliorer la connaissance du comportement des solutions autour de l'origine mais la limitation des développements en série de (III-2) détruit en général la conservativité et change donc les propriétés qualitatives des trajectoires discrètes dans le plan (p, q). De cette manière, les points singuliers du type centre peuvent se transformer en foyers stables ou instables.

Ce chapitre porte sur une méthode permettant la détermination d'une transformation ponctuelle osculatrice à M jusqu'à un certain degré n, i.e., ayant les mêmes termes que M jusqu'au degré n (compris). De plus, la transformation osculatrice proposée préserve l'aire (J = 1). Il s'agit ainsi, d'une transformation Crémonienne entière et conservative.

Dans ce qui suit on indiquera tout d'abord la façon dont les termes initiaux de (III-2) sont déterminés (III-2). Ensuite on traite successivement l'osculation jusqu'au second (§ III-3) et du troisième degrés (§III-4). En principe, l'osculation jusqu'aux degrés supérieurs semble possible mais le volume de calcul devient de plus en plus important. Des exemples d'application sont présentés dans les Sections III-5 et III-6 afin de permettre une estimation de l'efficacité de cette approche.

III-2 - DETERMINATION DES TERMES INITIAUX DES SERIES P ET Q DE (III-2)

Rappelons brièvement les idées directrices de la détermination du développement en série de P et Q, définis auparavant.

Ayant développé H (dans(III-1)) en série de puissances de x et y nous considérons que les coefficients périodiques sont constants par morceaux.

Il est donc possible de considérer sur chaque intervalle de temps, où ces coefficients sont constants, un système du type (III-1), Hamiltonien mais à coefficients constants. Moyennant un changement de variables linéaire , la récurrence qui associe l'état (x, y) au début d'un tel intervalle et celui (x_1, y_1) à sa fin, est d'une façon générale, de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = \rho\, x + \displaystyle\sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn}\, x^m y^n \\ y_1 = \rho^{-1} x + \displaystyle\sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn}\, x^m y^n \end{cases} \qquad \text{(III-6)}$$

où ρ , φ_{mn}, ψ_{mn} sont des constantes complexes. Le k-ième conséquent de (x, y), par itération successive de (III-6) peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} x_k = \rho^k x + \displaystyle\sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn}^{(k)}\, x^m y^n \\ y_k = \rho^{-k} y + \displaystyle\sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn}^{(k)}\, x^m y^n \end{cases} \qquad \text{(III-7)}$$

où $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ sont des polynômes en ρ^k, ρ^{-k} et k dont les coefficients dépendent des constantes φ_{mn}, ψ_{mn}.

Considérant (III-7) comme la solution de l'équation différentielle autonome considérée, avec les conditions initiales $x_0 = x$, $y_0 = y$, les séries x_k et y_k doivent vérifier le système différentiel :

$$\frac{dx_k}{dk} = U(x_k, y_k) \quad ; \quad \frac{dy_k}{dk} = V(x_k, y_k)$$

$$U(x, y) = \left[\frac{\partial x_k}{\partial k}\right]_{k=0} \quad ; \quad V(x, y) = \left[\frac{\partial y_k}{\partial k}\right]_{k=0} \qquad \text{(III-8)}$$

La détermination de ρ, φ_{mn} et ψ_{mn} se fait alors en identifiant les systèmes différentiels (III-1) et (III-8), dans chaque sous intervalle où les coefficients de (III-1) sont constants, moyennant un changement linéaire de variables.

La transformation finale est alors donnée par le produit de toutes les transformations partielles sur une période.

Les détails de cette méthode sont fournis par les références [33 - 53].

III-3 - OSCULATION JUSQU'AU SECOND DEGRE

Supposons maintenant que les termes du premier et second degré de P et Q aient été calculés par la méthode précédente. Alors, nous avons la transformation tronquée suivante :

$$\tau \begin{cases} p_1 = ap + bq + \overline{\varphi}_{20} p^2 + \overline{\varphi}_{11} pq + \overline{\varphi}_{02} q^2 \\ q_1 = cp + dq + \overline{\psi}_{20} p^2 + \overline{\psi}_{11} pq + \overline{\psi}_{02} q^2 \end{cases} \qquad \text{(III-11)}$$

Celle-ci n'est pas nécessairement du type conservatif. Afin d'obtenir cette propriété on cherche à construire une transformation préservant l'aire et osculatrice à τ jusqu'au second degré, i.e., ayant les mêmes termes de degré non supérieur à deux.

Pour simplifier, la transformation τ ci-dessus, est décomposée en un produit de deux transformations τ_1 et τ_2 :

$$(p, q) \xrightarrow{\tau_1} (U, V) \xrightarrow{\tau_2} (U_1, V_1) = (p_1, q_1), \qquad \tau = \tau_2 \circ \tau_1$$

La première, τ_1 est linéaire et conservative :

$$\tau_1 \begin{cases} U = ap + bq \\ V = cp + dq \end{cases} \qquad ad-bc = 1 \qquad \text{(III-12)}$$

La deuxième, τ_2 s'écrit

$$\tau_2 \begin{cases} U_1 = U + \varphi_{20} U^2 + \varphi_{11} UV + \varphi_{02} V^2 \\ V_1 = V + \psi_{20} V^2 + \psi_{11} UV + \psi_{02} V^2 \end{cases} \qquad \text{(III-13)}$$

où, les constantes φ_{ij} et ψ_{ij} sont des combinaisons linéaires des $\bar{\varphi}_{ij}$, $\bar{\psi}_{ij}$ de (III-11).

M préservant l'aire, les relations suivantes doivent se vérifier

$$\psi_{11} + 2\varphi_{20} = 0 \quad , \quad 2\psi_{02} + \varphi_{11} = 0 \qquad \text{(III-14)}$$

Le problème qui se pose maintenant est la construction d'une transformation polynomiale et conservative osculatrice à (III-13).

A partir de (III-14), il est évident que quatre (au plus) des six coefficients φ_{ij} et ψ_{ij} sont indépendants. Il est donc nécessaire de disposer d'une transformation osculatrice à quatre paramètres indépendants.

Considérons la transformation donnée par Engels [34] :

$$\begin{aligned} x' &= g(x, y) = x + \beta (\alpha x + \beta y)^2 \\ y' &= h(x, y) = y - \alpha (\alpha x + \beta y)^2 \end{aligned} \qquad \text{(III-15)}$$

qui préserve l'aire, indépendamment de α et β. A partir de (III-15) on peut définir la transformation :

$$x_1 = g(x, y) + \delta h^2(x,y) \qquad \text{(III-16)}$$
$$y_1 = h(x,y) + \gamma x_1^2 = h(x,y) + \gamma\left[g(x,y) + \delta h^2(x,y)\right]^2$$

préservent encore l'aire. Quatre paramètres indépendants figurent dans les expressions (III-15) et (III-16). Ils seront choisis de façon qu'il y ait osculation entre (III-16) et τ_2. Ceci nous mène au système

$$\beta\alpha^2 = \varphi_{20},\ 2\alpha\beta^2 = \varphi_{11},\ \beta^3 + \delta = \varphi_{02},\ -\alpha^3 + \gamma = \psi_{20} \qquad \text{(III-17)}$$

Supposant $\varphi_{20} \neq 0$ et $\varphi_{11} \neq 0$, la transformation osculatrice à τ_2 sera définie par :

$$\begin{cases} \bar{p}_1 = U + \varphi_{20}\left[U + \dfrac{\varphi_{11}}{2\varphi_{20}}V\right]^2 + \left(\varphi_{02} - \dfrac{\varphi_{11}}{4\varphi_{20}}\right)^2\left[V - \dfrac{2\varphi_{20}^2}{\varphi_{11}}\left(U + \dfrac{\varphi_{11}}{2\varphi_{20}}V\right)^2\right]^2 \\ \bar{q}_1 = V - \dfrac{2\varphi_{20}^2}{\varphi_{11}}\left(U + \dfrac{\varphi_{11}}{2\varphi_{20}}V\right)^2 + \left(\psi_{20} + \dfrac{2\varphi_{20}^2}{\varphi_{11}}\right)\bar{p}_1^2 \end{cases} \qquad \text{(III-18)}$$

Le cas tel que $\varphi_{20} = \varphi_{11} = 0$, est résolu, en prenant $\alpha = \beta = 0$; $\delta = \varphi_{02}$; $\gamma = \psi_{20}$. Les cas $\varphi_{20} = 0$, $\varphi_{11} \neq 0$ ou $\varphi_{20} \neq 0$, $\varphi_{11} = 0$ sont réductibles au premier, par un changement de variables dans (III-13) :

$$u = U \quad , \quad v = V - \mu U \qquad \text{si } \varphi_{20} = 0 \qquad \text{(III-19)}$$

et

$$u = U - \mu V \quad , \quad v = V \qquad \text{si } \varphi_{11} = 0 \qquad \text{(III-20)}$$

En effet, les nouveaux coefficients φ'_{ij} obtenus par ce changement sont :

$$\varphi'_{20} = \varphi_{20} + \mu\varphi_{11} + \mu^2\varphi_{02},\ \varphi'_{11} = \varphi_{11} + 2\mu\varphi_{02} \qquad \text{(III-21)}$$

pour (III-19) et

$$\varphi'_{20} = \varphi_{20} - \mu\psi_{20},\ \varphi'_{11} = \varphi_{11} + 2\mu\varphi_{20} - \mu\psi_{11} - 2\mu^2\psi_{20}$$

pour (III-20)

$$\left(\varphi'_{11} = \varphi_{11} + 4\mu\varphi_{20} - 2\mu^2\psi_{20}\right). \qquad \text{(III-22)}$$

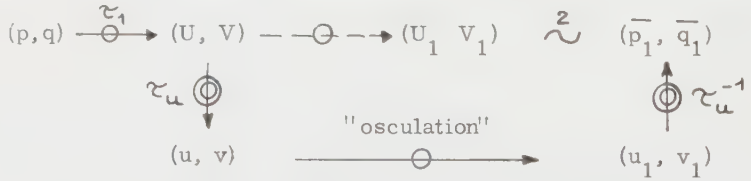
Il est clair que la partie linéaire de (III-13) reste inchangée par (III-19) ou (III-20)

Remarque :

D'un point de vue pratique, le paramètre μ utilisé dans (III-19) ou (III-20) joue un rôle important. En effet, considérant les expressions (III-18) on voit que les termes de degré supérieur à deux, dépendent du rapport $r = \varphi_{11} / 2\,\varphi_{20}$ et de son inverse r^{-1}. Si l'une de ces valeurs est sensiblement supérieure à l'unité en module, les termes cités ne peuvent pas être négligés même dans un voisinage relativement petit de l'origine, et l'approximation par la transformation osculatrice ne serait acceptable que dans un domaine excessivement petit de l'origine. Ainsi, le paramètre μ doit être choisi de façon à augmenter le domaine de validité de l'approximation et peut donc être regardé comme un autre degré de liberté.

Pour les exemples de la Section III-5, les meilleurs résultats ont été obtenus pour une valeur de μ donnant r sensiblement égal à 1

Le diagramme ci-après indique en trait continu, ce qui est vraiment effectué en pratique pour l'obtention de la transformation osculatrice complète :



τ_μ correspond à (III-19) ou (III-20)

transformation ponctuelle

changement de variables

$\sim^2$ osculation jusqu'au second degré

III-4 - OSCULATION JUSQU'AU TROISIEME DEGRE

Le point de départ maintenant est une transformation polynomiale :

$$U_1 = U + \sum_{m+n=2}^{3} \varphi_{mn} U^m V^n$$

$$V_1 = V + \sum_{m+n=2}^{3} \psi_{mn} U^m V^n \qquad \text{(III-23)}$$

Il est supposé que la transformation (III-12) a été déjà effectuée. Nous avons donc les relations dues à la conservativité :

$$\begin{aligned} &\psi_{11} + 2\varphi_{20} = 0 \;;\; 2\psi_{02} + \varphi_{11} = 0 \\ &\psi_{21} + 2\varphi_{20}\psi_{11} + 2\varphi_{30} - 2\varphi_{11}\psi_{20} = 0 \\ &2\psi_{12} + 4\varphi_{20}\psi_{02} + \varphi_{11}\psi_{11} + 2\varphi_{21} - 4\varphi_{02}\psi_{20} = 0 \\ &3\psi_{03} + 2\varphi_{11}\psi_{02} + \varphi_{12} - 2\varphi_{02}\psi_{11} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(III-24)}$$

Alors, dans les expressions (III-23) il y a 14-5 = 9 coefficients indépendants comme par exemple :

$$\varphi_{20},\ \varphi_{11},\ \varphi_{02},\ \psi_{20},\ \varphi_{30},\ \varphi_{21},\ \varphi_{12},\ \varphi_{03},\ \psi_{30}$$

De façon analogue au cas précédent, nous commençons par une transformation ponctuelle polynomiale du troisième degré (voir Engels [34])

$$\begin{cases} x' = g(x,y) = x + \beta_1((\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 + a(\alpha_1 x + \beta_1 y)^3) \\ y' = h(x,y) = y - \alpha_1((\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 + a(\alpha_1 x + \beta_1 y)^3) \end{cases} \qquad \text{(III-25)}$$

qui préserve l'aire, ensuite on construit la transformation (qui préserve l'aire) :

$$\begin{cases} x_1 = x' + \delta y'^2 + \varepsilon y'^3 = g(x,y) + \delta h^2(x,y) + \varepsilon h^3(x,y) \\ y_1 = y' + \gamma x_1^2 + \nu x_1^3 = h(x,y) + \gamma x_1^2 + \nu \alpha_1^3 \end{cases} \qquad \text{(III-26)}$$

La transformation $x, y \longrightarrow x_1, y_1$ contient 7 paramètres indépendants, $\alpha_1, \beta_1, a, \delta, \varepsilon, \gamma, \nu$, donc il n'est pas en général possible d'obtenir directement l'osculation.

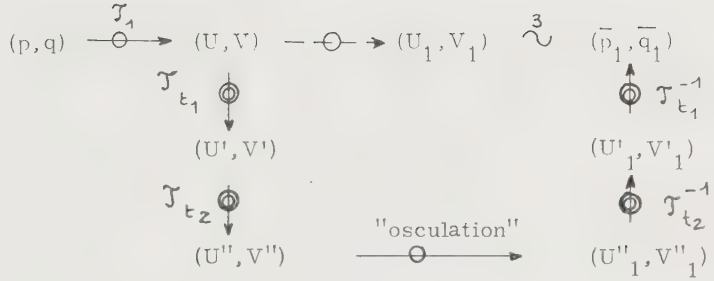
Il est nécessaire d'introduire deux paramètres supplémentaires. Nous avons vu que $\alpha_1, \beta_1, \delta, \gamma$ assurent l'osculation jusqu'au second degré. Il est possible de disposer de deux paramètres supplémentaires en effectuant sur (III-23) un changement de variables défini successivement par les transformations :

$$\tau_{t_1} \begin{cases} U' = U \\ V' = V + t_1 U^2 \end{cases} \qquad \text{(III-27)}$$

$$\tau_{t_2} \begin{cases} U'' = U' + t_2 V'^2 \\ V'' = V' \end{cases} \qquad \text{(III-28)}$$

Ces transformations ont été choisies non seulement pour leur simplicité mais aussi parce que les inverses sont bien définis et d'obtention aisée.

Avec les nouvelles variables U'', V'' nous avons encore la préservation de l'aire. Comme auparavant, le diagramme ci-après, indique la séquence d'opérations effectuées (trait continu).



changement de variables

transformation

3 osculation jusqu'au 3ème degré.

Pour simplifier, on a supposé que le changement (III-19) ou (III-20) a déjà été effectué avec une certaine valeur de μ (qui peut être choisie de façon à avoir $\varphi_{11}/2\,\varphi_{20} \approx 1$) . La détermination de α_1, β_1, γ et δ se fait comme dans le cas précédent. Ensuite il faut résoudre un système linéaire à trois équations ayant a, t_1 et t_2 pour inconnues. Enfin, ε et ν sont obtenus facilement à partir des paramètres précédents. Les résultats essentiels sont donnés ci-dessous et les détails de calcul se trouvent dans l'Annexe C 1.

Posons :

$$r = \varphi_{11} / 2\,\varphi_{20} \tag{III-29}$$

Alors on a successivement

$$\gamma = \psi_{20} + \frac{\varphi_{20}}{r} \tag{III-30}$$

$$\delta = \varphi_{02} - \frac{r\varphi_{11}}{2} \tag{III-31}$$

$$t_1 = \left[2\,(\psi_{11} - \varphi_{20})\,a_1 - 2\,\psi_{20}\,b_1\right]/\Delta \tag{III-32}$$

$$t_2 = -\left[3\,\varphi_{11}\,r^2\,a_1 - b_1\,(3\,\varphi_{11}\,r - 2\,\varphi_{02})\right]/\Delta \tag{III-33}$$

$$\bar{a} = \varphi_{30} - t_1\,\varphi_{11}\,,\quad \bar{a} = \alpha_1^{\,3}\,\beta_1\,a \tag{III-34}$$

$$\varepsilon = \varphi_{03} + (2\varphi_{02} - \varphi_{11})\, t_2 + 2\varphi_{02}\, r\Delta - \bar{a} r^3 \qquad \text{(III-35)}$$

$$\gamma = \psi_{30} + (2\varphi_{20} - \psi_{11})\, t_1 - 2\gamma\varphi_{20} + \frac{\bar{a}}{r} \qquad \text{(III-36)}$$

où

$$\Delta = 2(\psi_{11} - \varphi_{20})(2\varphi_{11} r - 2\varphi_{02}) - 6\psi_{20}\varphi_{11} r^2 \qquad \text{(III-37)}$$

$$a_1 = 3\varphi_{30} r - 2\Delta(\varphi_{20}/r) - \varphi_{21} \qquad \text{(III-38)}$$

$$b_1 = 3\psi_{30} r^2 - 4\Delta\varphi_{20} - \varphi_{12} \qquad \text{(III-39)}$$

Pour dériver ces expressions il faut supposer qu'il existe dans M au moins un terme du second degré non nul.

Remarque 1 :

L'expression (III-37) peut aussi s'écrire :

$$\Delta = -36\, \varphi_{20}^2 r + 12\, \psi_{20} (\varphi_{02} + \psi_{20} r^3)$$

Remarque 2 :

Les transformations (III-15-16-25-26) sont des cas particuliers de quelques formes générales données par Engels [34] pour les transformations crémoniennes entières. L'avantage de les utiliser est dû au fait que les paramètres indépendants apparaissent explicitement. Ces paramètres sont en nombre bien inférieur au nombre de coefficients des polynomes qui définissent les transformations osculatrices obtenues.

III-5 - QUELQUES ESSAIS NUMERIQUES

La méthode exposée aux paragraphes précendents est ici appliquée à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)\left[\alpha x^2 + \beta x^3\right] \qquad \text{(III-40)}$$

où f (t) est le train d'impulsions de la figure III-1 ci-après :

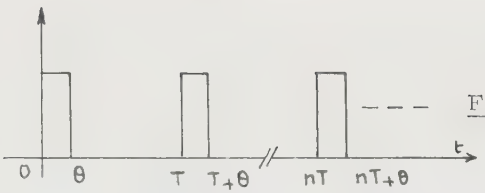


Figure III-1

Il est possible de déterminer les premiers termes de la transformation ponctuelle associée à III-40, en utilisant la méthode développée dans [33] . Les résultats sont donnés ci-dessous :

$$X_1 = \rho X + \sum_{m+n=2}^{3} \varphi_{mn} X^m Y^n , \quad \rho = e^{-jT} \tag{III-41}$$

$Y_1 = X^*_1$ ($*$: conjugaison complexe)

$X = x + jy = x + j \frac{dx}{dt}$

et :

$$\begin{aligned}
\varphi_{20} &= \frac{\alpha}{4} e^{-jT}(1-e^{-j\theta}) \\
\varphi_{11} &= \frac{\alpha}{2} e^{-jT}(e^{j\theta}-1) \\
\varphi_{02} &= \frac{\alpha}{4} e^{-jT}(e^{3j\theta}-1) \\
\varphi_{30} &= e^{-jT}\left[\frac{\alpha^2}{24} e^{j\theta}(e^{-j\theta}-1)^3 + \frac{\beta}{16}(e^{-2j\theta}-1)\right] \\
\varphi_{21} &= e^{-jT}\left[\frac{\alpha^2}{27}(30j\theta - e^{3j\theta} - 8 - 9e^{j\theta} + 18e^{-j\theta}) - 3j\frac{\theta\beta}{8}\right] \\
\varphi_{12} &= e^{-jT}\left[\frac{\alpha^2}{29}(e^{-j\theta} - 1 - 3e^{j\theta} + 5e^{2j\theta} - 2e^{3j\theta}) - \frac{3\beta}{16}(e^{2j\theta}-1)\right] \\
\varphi_{03} &= -e^{-jT}\left[\frac{\alpha^2}{48}(e^{4j\theta} - 2e^{3j\theta} - 1 + 2e^{j\theta}) + \frac{\beta}{32}(e^{4j\theta}-1)\right]
\end{aligned} \tag{III-42}$$

Nous pouvons obtenir de (III-41) et (III-42), les termes de degré non supérieur au troisième. La transformation osculatrice est alors construite comme indiqué auparavant.

L'équation (III-40) est par exemple considérée dans l'étude du mouvement transversal des particules dans un accélérateur ou dans un anneau de stockage [44] .

Exemple A : $T = 1,588$; $\theta = 0.36$, $\alpha = 10$, $\beta = 0$.

Les résultats obtenus par intégration numérique ont été tracés sur la figure III-2. Une structure d'îlots d'ordre quatre entoure l'origine, qui est un "centre". Le comportement régulier des trajectoires discrètes cesse d'exister au delà d'une certaine limite située au voisinage de la courbe Γ . A l'intérieur, nous avons un domaine apparamment intégrable [2] On parlera dans ce cas de région "quasi-intégrable", puisque l'intégrabilité au sens strict du mot n'est pas en général vérifiée.

En dehors de la courbe Γ , le point itéré décrit une sorte de mouvement très irrégulier que l'on désignera par "mouvement stochastique" Ce comportement est lié à la présence de points homoclines et hétéroclines générés par les courbes invariantes passant par des points singuliers du type "col" [22 – 38] . Dans cet exemple, il a été vérifié qu'il existe une instabilité stochastique [36] de manière que, en dehors de Γ , et avec une condition initiale proche d'elle, le point itéré décrit initialement un mouvement à divergence lente (par rapport à Γ) suivi d'un mouvement à divergence rapide qui éloigne les points itérés de façon irreversible.

Les points numérotés appartiennent à la même trajectoire discrète commençant à P (les chiffres indiquent quelques itérations successives de M^5).

Le tableau 2 donne quelques itérations obtenues par la transformation osculatrice du troisième degré et par intégration numérique, n

étant le nombre d'itérations effectuées, à partir d'une même condition initiale.

Evidemment, l'écart entre les deux résultats est d'autant plus sensible que l'on s'éloigne de l'origine. Cependant, il est à remarquer que dans la région "quasi-intégrable" l'erreur se développe en "phase", plutôt qu'en "amplitude". La conséquence de ceci est que le portrait de phase est pratiquement le même, du moins avec la précision du tracé de la figure III-1, qui alors représente aussi les résultats obtenus par la transformation osculatrice (du troisième degré).

Les positions des points des cycles C_1, C_2, C_3, C_4 et S_1, S_2, S_3, S_4 de la transformation osculatrice, ont été trouvées à l'aide d'un programme numérique, avec une précision de 10^{-9}, utilisant à la fois la méthode du gradient et la méthode de Newton (Programme "Cyderec" [52]). Par un test, utilisant l'intégration numérique, il a été possible d'estimer que ces cycles représentent les vrais cycles (transformation M) à une précision de 10^{-5} près.

Aussi bien pour l'intégration numérique que pour la transformation osculatrice, il n'a pas été possible de détecter des points homoclines ou hétéroclines sur les courbes invariantes issues des "cols" $S_1 \cdots S_4$ (Deux de ces courbes sont montrées sur la figure III-2, entre S_1 et S_2). Ce fait est en relation avec le caractère quasi intégrable de la région intérieure à Γ qui contient la structure en îlots correspondante à ces cols.

La figure III-3 a été obtenue avec l'osculation du second degré. Quantitativement la validité de l'approximation est restreinte à un domaine plus petit, autour de l'origine. La structure en îlots existe encore mais le portrait de phase est assez distordu par rapport à la figure III-2.

Exemple B : $T = 1,63$; $\theta = 0,36$; $\alpha = 10$; $\beta = 0$

Comme dans le cas précédent, les résultats de l'intégration et de l'osculation du troisième degré sont semblables (voir tableau III-2). Sur la figure III-4 on voit que la structure en îlots s'est éloignée de l'origine. Le domaine de "quasi-intégrabilité" autour de l'origine a diminué par rapport à l'Exemple A. La courbe Γ délimite d'une façon approchée cette région. Les points distribués irrégulièrement autour des "centres" des îlots appartiennent à une même trajectoire. Deux courbes invariantes issues de S_1 et S_4 montrent le caractère non intégrable de la région où le comportement des trajectoires discrètes est du type "stochastique". La courbe L_1 de S_4 et la courbe L_2 de S_1 se coupent une infinité de fois donnant origine à des points hétéroclines.

Quelques boucles de L_1 ont été tracées, utilisant la transformation osculatrice et une vérification basée sur l'intégration numérique a pu mettre en évidence que, tout comme pour les courbes fermées du domaine "quasi-intégrable", l'erreur se développe en "phase" sur L_1.

Dans la région "stochastique" entourant les "centres" des îlots il y a aussi instabilité stochastique, c'est-à-dire, une trajectoire commençant dans cette région finit par s'en éloigner (irréversiblement) comme dans l'exemple précédent. Des portraits de phase semblables peuvent être trouvés aussi dans [40] , par exemple.

Quant à l'osculation du second degré (figure III-5), les résultats sont satisfaisants à l'intérieur de Γ mais se dégénèrent sensiblement à l'extérieur.

Exemple C : $T = 1,5709$; $\theta = 0,1$; $\alpha = -10$; $\beta = -1$

Ici, la valeur de T est très proche de $2\pi/4$, où théoriquement une résonance paramètrique devrait avoir lieu comme montré dans [53] Pour les valeurs choisies de α et β cette résonance correspond à un point hyperbolique [2] avec 8 courbes invariantes issues de l'origine. L'allure des trajectoires obtenues par intégration et par osculation sont très proches comme l'on peut voir d'après le détail sur la figure III-6.

Le tableau III-3 donne les valeurs des paramètres utilisés pour l'osculation, dans les trois exemples ci-dessus.

Il convient encore de noter que les séries tronquées à partir des termes du 4ème degré, conduisent à des résultats satisfaisants pour un nombre non élevé d'iterations mai ceci n'est plus vrai lorsque ce nombre croît. Par exemple, considérant l'origine ou bien les "centres" des ilôts, les courbes invariantes par M ou M^4 fermées les entourant disparaissent . Un comportement du type foyer stable ou instable est alors observé ce qu'indique la destruction de la conservativité.

Remarque : La méthode d'intégration numérique utilisée est la méthode de Runge-Kutta (4ème ordre), à pas adaptatif - Ralston [35] : Erreur estimée $< 10^{-8}$.

	Transformation osculatrice		Intégration numérique		
n	X	Y	X	Y	
0	0,05	0	0,05	0	
10	-0,00835113	-0,05139432	-0,00834973	-0,05139527	
40	-0,01862271	-0,05294405	-0,01861879	-0,05294774	
60	-0,02587861	-0,05323888	-0,02587089	-0,05324836	
200	-0,05009292	0,00901835	-0,05009050	0,00892006	
400	0,02743005	0,05065437	0,02729490	0,05067465	
600	0,05500973	-0,03379491	0,05503413	-0,03366572	
745	-0,05016173	0,01241045	-0,05016082	0,01204627	
0	0,1	0	0,1	0	
100	0,04383988	-0,08528784	0,04374121	-0,09524857	
200	0,05865594	-0,10588185	0,05846941	-0,10566201	
400	0,06106618	-0,13961848	0,06167375	-0,13966534	
700	0,02937415	-0,09562585	0,02899163	-0,09585284	
0	0,2	0	0,2	0	
100	0,152466	-0,110926	0,15334668	-0,10537630	
200	0,171026	-0,0938892	0,17440640	-0,091378	
400	0,2272165	-0,0720555	0,236263	-0,065829	
700	0,158958	-0,045155	0,140034	0,06575	
0	0,225	0	0,225	0	
10	-0,138654	-0,173515	-0,137934	-0,173137	
20	0,080260	0,233820	0,080038	0,233382	region stochast.
30	0,301220	-0,114166	0,301447	-0,113954	
40	0,014320	-0,195143	0,019999	-0,196991	
50	-0,114962	0,107698	-0,130526	0,091030	
0	0,0053833	0,1263964	0,0053833	0,1263694	
8			0,0053750	0,1263506	
16	id.		0,0053735	0,1263323	(point C_2)
32			0,0053904	0,1263137	
64			0,005434	0,12636651	
0	0,0447153	0,0525959	0,0447153	0,0525959	
4			0,0447139	0,0525977	
8			0,0447125	0,0525997	
12			0,0447113	0,0526016	(point S_2)
24			0,044707	0,0526135	

Tableau III-1 : T = 1,588 ; θ = 0,36 ; α = 10 β ; = 0

Exemple A

	Transformation osculatrice		Intégration numérique		
n	X	Y	X	Y	
0	0,05	0	0,05	0	
100	0,03727	-0,03919	0,3728	-0,03918	
200	0,05036	-0,00344	0,05035	-0,00342	
400	-0,00726	0,04889	-0,00730	0,04888	
600	-0,04408	-0,02555	-0,04405	-0,02560	
700	-0,00949	-0,04853	-0,00957	-0,04852	
0	0,15	0	0,15	0	
40	0,04454	-0,14284	0,04415	-0,14405	
80	0,04127	-0,15363	0,03822	-0,15158	région stochast.
120	0,04252	-0,16813	0,03723	-0,16091	
160	0,04662	-0,18021	0,03290	-0,16470	
200	0,07649	-0,20455	0,02220	-0,15151	
0	0,2	-0,05	0,2	-0,05	
100	0,13841	-0,22519	0,14023	-0,22538	
200	0,13488	-0,19944	0,13655	-0,20198	
300	0,10496	-0,17563	0,10167	-0,17381	
400	0,07614	-0,17172	0,07838	-0,17138	
600	0,13197	-0,22343	0,12287	-0,21994	

Tableau III-2 : T = 1,63 ; θ = 0,36 ; α = 10 ; β = 0

Exemple B

Exemple / Paramètre	A	B	C
μ	1.150	1.10	1.00
φ_{20}	3.37347	3.37698	3.39872
ι	0.99912	1.00746	1.05171
γ	0.03744	0.03705	0.00079
$\hat{\delta}$	0.03910	0.03954	0.00092
τ_1	0.01549	0.01551	0.00029
τ_2	0.01657	0.01697	0.00049
λ	0.00176	0.00173	0.
$\hat{\iota}$	0.00146	0.00150	0.
$\overline{\alpha}$	1.36967	1.39126	0.05685

Tableau III-3 : Valeurs des paramètres des exemples traités dans la Section III-5.

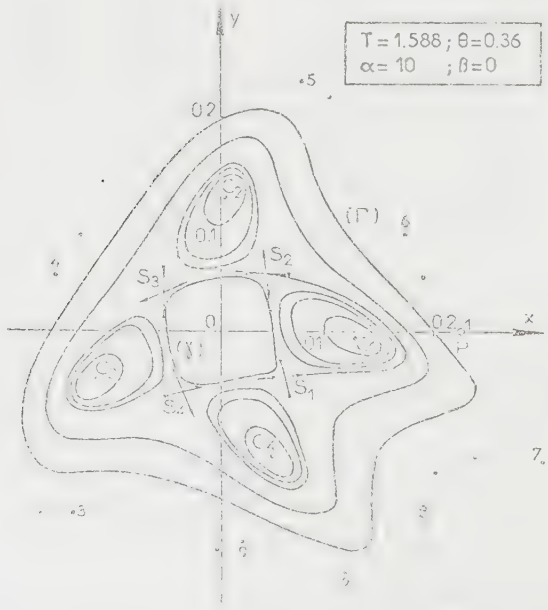


Figure III-2 - Intégration numérique et osculation jusqu'au 3ème degré. Exemple A.

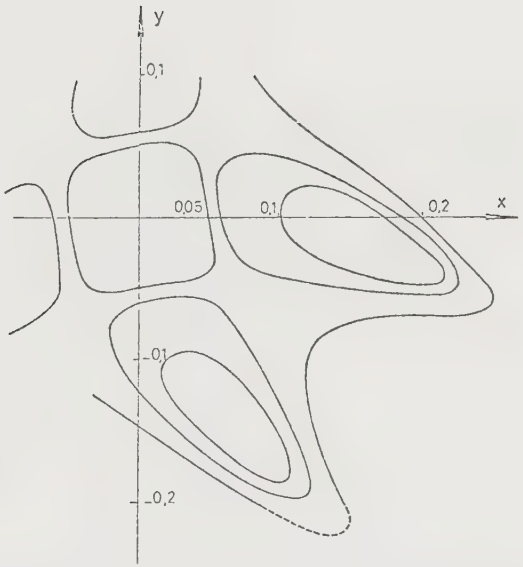


Figure III-3 - Osculation jusqu'au deuxième degré. Exemple A.

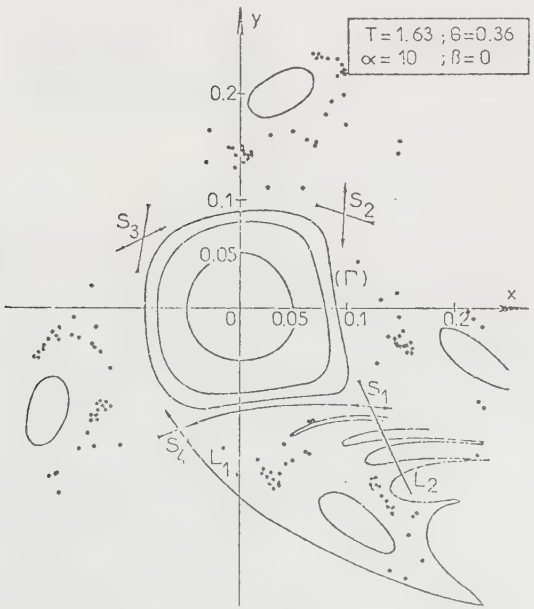


Figure III-4 - Intégration numérique et osculation jusqu'au 3ème degré. Exemple B

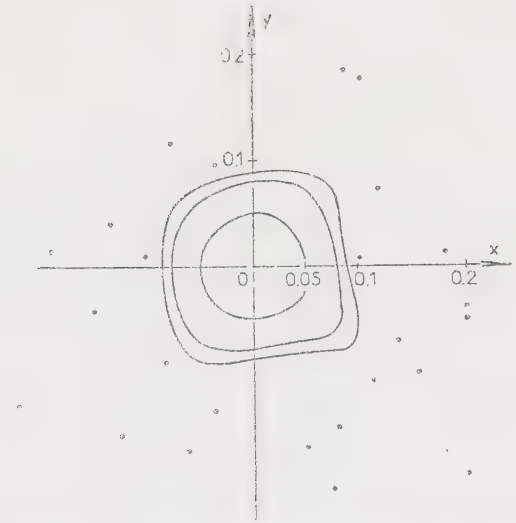


Figure III-5 - Osculation jusqu'au deuxième degré. Exemple B.

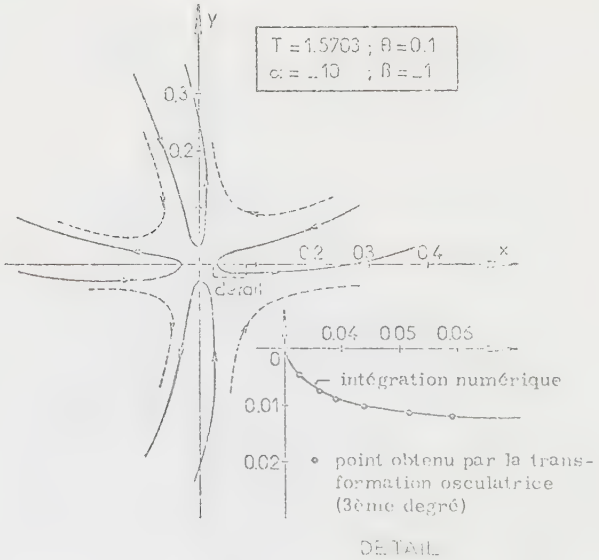


Figure III-6 - Situation voisine d'une résonance paramétrique Exemple C.

III-6 - APPLICATION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN SATELLITE DONT LES INERTIES SONT DES FONCTIONS PERIODIQUES DU TEMPS

Cette application a été inspirée de l'étude entreprise par Liégeois [51] concernant l'établissement d'une récurrence associée au comportement dynamique d'un satellite soumis à des variations d'inertie Dans ce travail la récurrence était déterminée par une méthode numérique basée sur les propriétés de conservativité du satellite.

Dans cette section une approche différente de ce problème est présentée. Pour cela la méthode d'osculation est utilisée, mais avec une variante qui permet une meilleure approximation dans un voisinage plus important de la configuration d'équilibre.

III-6-1 - Système différentiel décrivant le comportement libre du corps principal

Ce système peut s'exprimer sous la forme

$$J(t)\dot{\underline{\omega}} + \dot{J}(t)\,\underline{\omega} + \tilde{\underline{\omega}}\,J(t)\,\underline{\omega} = 0 \qquad \text{(III-43)}$$

où J (t) est la matrice des inerties centrales, dont les éléments sont supposés périodiques par rapport au temps. De plus nous allons supposer (comme dans [51]) que J (t) est une matrice diagonale de la forme

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_{XX}(t) & & 0 \\ & J_{YY}(t) & \\ 0 & & J_{ZZ}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{(III-44)}$$

Le vecteur $\underline{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ est le vecteur de rotation instantanée dans le système de coordonnées choisi, et $\tilde{\omega}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$

Au lieu du vecteur de rotation instantané il est possible de considérer le vecteur formé par les cosinus directeurs α, β, γ du mouvement cinétique $\vec{H} = J\,\omega$:

$$\alpha = \frac{1}{H}\left[J_{XX}\omega_X\right], \quad \beta = \frac{1}{H}\left[J_{YY}\omega_Y\right]$$
$$\gamma = \frac{1}{H}\left[J_{ZZ}\omega_Z\right] \qquad \text{(III-45)}$$

où H, module de $\vec{H}$, est une constante du mouvement.

Le système (III-43) s'écrit alors :

$$\dot{\alpha} + \frac{(J_{ZZ} - J_{YY})H}{J_{ZZ}\,J_{YY}}\,\beta\gamma = 0$$

$$\dot{\beta} + \frac{(J_{XX} - J_{ZZ})H}{J_{ZZ}\,J_{XX}}\,\alpha\gamma = 0 \qquad \text{(III-46)}$$

$$\dot{\gamma} + \frac{(J_{YY} - J_{XX})H}{J_{YY}\,J_{XX}}\,\alpha\beta = 0$$

Comme nous avons :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

il est possible d'éliminer une des variables, par exemple γ. Pour bien fixer les idées on a supposé les inerties J_{XX}, J_{YY} et J_{ZZ} définies par les expressions

$$J_{XX} = A \quad , \quad J_{YY} = B + \varepsilon\cos(\omega_0 t)$$
$$J_{ZZ} = C + \varepsilon\cos(\omega_0 t)$$

(voir [51]) avec $B \leq A < C$.

Nous avons donc le système différentiel à coefficients variant périodiquement dans le temps :

$$\dot{\alpha} = -F(t)\,\beta / Q(\alpha,\beta)$$
$$\dot{\beta} = -G(t)\,\alpha / Q(\alpha,\beta) \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}} \tag{III-47}$$

où F et G sont les fonctions périodiques suivantes

$$F(t) = \frac{(C-B)\,H}{\left[C+\varepsilon\cos(\omega_0 t)\right]\left[B+\varepsilon\cos(\omega_0 t)\right]}$$
$$G(t) = \frac{C-A+\varepsilon\cos(\omega_0 t)}{C+\varepsilon\cos(\omega_0 t)} \times \frac{H}{A} \tag{III-48}$$

avec $\omega_0 = 2\pi / T$, T étant la période.

La transformation ponctuelle $\mathcal{T}_\varepsilon$ engendrée par le système (III-47) liant les valeurs de α et β à l'instant $t = 0$ à celles à l'instant $t = T$ est conservative avec fonction quasi invariante Q (au sens de Birkhoff [2]) mais elle ne préserve pas l'aire au sens ordinaire. Il est cependant possible d'effectuer un changement de variables permettant d'obtenir la propriété de préservation d'aire. En effet, la transformation $\mathcal{T}_\varepsilon$ possède l'invariant intégral

$$I(D) = \iint_D Q(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta = I(\mathcal{T}_\varepsilon(D))$$

Cherchons donc une substitution $(\alpha,\beta) \longrightarrow (u, v)$ avec le jacobien $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)} = Q(\alpha,\beta)$. Pour cela il suffit de la définir par les relation :

$$v = -\alpha$$
$$u = \int_0^\beta Q(\alpha, s)\,ds = \text{Arc sin}\,\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{III-49}$$

On peut facilement constater que le jacobien de (III-43) satisfait la relation ci-dessus.

Réécrivons (III-49) avec les nouvelles coordonnées u et v :

$$\left[\begin{array}{l} \dot{u} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} = -\left[G(t) - F(t)\sin^2 u\right] v \\ \dot{v} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = F(t)\sin u \cos u\,(1 - v^2) \end{array}\right. \qquad \text{(III-50)}$$

$$\mathcal{H} = \left[F(t)\sin^2 u\,(1 - v^2) + G(t)\,v^2\right]\frac{1}{2}$$

Ce système est Hamiltonien et la transformation ponctuelle associée préserve l'aire au sens habituel. Il est alors possible d'appliquer les résultats des Sections III-3 et III-4. Deux méthodes d'obtention de transformations osculatrices sont décrites ci-dessous : l'osculation directe et l'osculation indirecte. La première est une application directe de III-2 et III-3. L'osculation indirecte est basée sur la connaissance de la solution exacte (sous forme analytique) du système non perturbé ($\varepsilon = 0$) et permet en général d'élargir le domaine de validité de la transformation approchée, lorsque ε est suffisamment petit.

Remarque : Le changement de variables (III-49) transforme le cercle unitaire $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ en un rectangle défini par $u = \pm \pi/2$ $(-1 \leq v \leq 1)$ et $v = \pm 1$ $(-\pi/2 \leq u \leq \pi/2)$.

III-6-2 - Osculation directe

La transformation $(u_1, v_1) = \overline{\mathcal{T}}_\varepsilon (u, v)$ ne contient que des termes de degré impair. Il est donc nécessaire soit d'adapter la méthode des sections III-3 et III-4 (puisqu'elle présuppose l'existence de termes de second degré non nuls) soit d'élaborer une autre méthode permettant l'osculation en

absence de termes de degré pair. Dans un premier temps nous avons opté pour la première possibilité à cause de la simplicité de l'adaptation nécessaire. En effet, supposons une transformation ponctuelle $\mathcal{T}^*$ préservant l'aire de la forme :

$$\mathcal{T}^* : U_1 = U + P_3(U, V) + \ldots, \quad V_1 = V + Q_3(U, V) + \ldots$$

où P_3 et Q_3 représentent les termes du troisième degré. En outre supposons que tous les autres termes sont de degré impair.

L'idée consiste à introduire un terme du second degré dans la transformation $\mathcal{T}^*$, de calculer une transformation $\tilde{\mathcal{T}}$ osculatrice à $\mathcal{T}^*$ (jusqu'aux termes du 3ème degré) et ensuite d'éliminer les termes du second degré en faisant le produit de la transformation osculatrice par une transformation conservative possédant des termes du second degré ($\mathcal{T}_c$).

Au lieu de $\mathcal{T}^*$, nous considérons alors une transformation de la forme :

$$\mathcal{T}^{*\prime} : U_1 = U - c\,V^2 + P_3(U, V) + \ldots, \quad V_1 = V + Q_3(U, V) + \ldots$$

Par la méthode des sections III-2 et III-3 nous pouvons déterminer une transformation $\tilde{\mathcal{T}}$ préservant l'aire et telle que $\tilde{\mathcal{T}} \overset{3}{\sim} \mathcal{T}^{*\prime}$.

Alors en définissant $\mathcal{T}_c$ par :

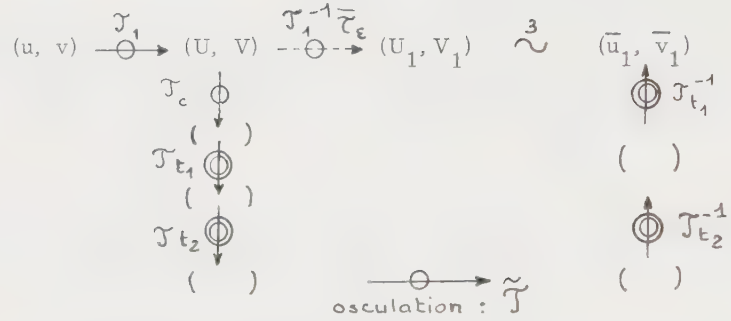
$$\mathcal{T}_c : U_1 = U + c\,V^2 \quad , \quad V_1 = V \qquad \text{(III-51)}$$

il est clair que $\mathcal{T}_c\,\tilde{\mathcal{T}} \overset{3}{\sim} \mathcal{T}^*$.

L'inconvénient qui se pose ici est l'introduction de termes du 4ème degré qui n'existent pas dans $\mathcal{T}^*$. Dans un voisinage assez petit de l'origine leur influence est cependant réduite.

En pratique c est choisi de façon à minimiser la différence entre transformation osculatrice et transformation tronquée

Le diagramme correspondant à celui de la Section III-3 devient



Osculation directe (variables u, v)

III-6-3 - Osculation indirecte

Si la perturbation est de petite amplitude (ε), la méthode proposée auparavant peut être rendue plus efficace de la façon indiquée ci-dessous.

Pour un certain ε , désignons par $\bar{\bar{T}}_\varepsilon$ la transformation ponctuelle associée à (III-50). Nous pouvons décomposer cette transformation en un produit de deux transformations (préservant l'aire)

$$\bar{\bar{T}}_\varepsilon = \bar{\bar{T}}_o \; I_\varepsilon \qquad \text{(III-52)}$$

où $\bar{\bar{T}}_o$ est la transformation associée à (III-50) lorsque $\varepsilon = 0$. En outre nous avons $I_\varepsilon = \bar{\bar{T}}_o^{-1} \; \bar{\bar{T}}_\varepsilon$. Il est donc possible de calculer les coefficients des premiers termes de I_ε à partir de ceux (déterminés numériquement comme indiqué à la Section III-2) de $\bar{\bar{T}}_o^{-1}$ et $\bar{\bar{T}}_\varepsilon$ (Remarque : en fait, $\bar{\bar{T}}_o^{-1}$ peut ici être déterminé analytiquement). L'obtention de I_ε (premiers termes) se réalise simplement par voie numérique comme l'indique l'Annexe C 2. Evidemment I_ε tend vers la transformation unitaire, lorsque ε tend vers zéro (c'est-à-dire, I_o : (u, v) $\longrightarrow$ (u, v)).

Comme I_ε préserve l'aire nous pouvons déterminer, par

la méthode du § III-6-4, une transformation polynomiale $\widetilde{I}_\varepsilon$ qui lui est osculatrice.

Désignons par $\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon$ et $\mathcal{T}_0$ les transformations correspondantes à $\bar{\mathcal{T}}_\varepsilon$ et $\bar{\mathcal{T}}_0$, dans le système initial de variables (α, β). Alors nous pouvons écrire la relation :

$$\mathcal{T}_\varepsilon \overset{3}{\sim} \widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon \quad , \quad \widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon = \mathcal{T}_0\, C^{-1}\, \widetilde{I}_\varepsilon\, C \qquad \text{(III-53)}$$

où $C : (\alpha, \beta) \longrightarrow (u, v)$ est la transformation définie par (III-49).

La transformation $\mathcal{T}_0$ peut être obtenue sous forme analytique (voir par exemple [51]) et $\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon$ "tend" vers $\mathcal{T}_0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. En outre il est possible de constater que les termes de degré supérieur à trois dans $\widetilde{I}_\varepsilon$, ont ε^2 en facteur, donc leur influence est relativement réduite lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour simplifier nous n'avons considéré que le cas A = B (satellite symétrique). Dans cette hypothèse $\mathcal{T}_0$ est définie par les relations :

$$\mathcal{T}_0 \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha \cos \omega_\rho\, T - \beta \sin \omega_\rho\, T \\ \beta_1 = \alpha \sin \omega_\rho\, T + \beta \cos \omega_\rho\, T \end{array} \right. \qquad \text{(III-54)}$$

$$\omega_\rho = \frac{C-A}{AC} \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$$

Si $A \neq B$ il n'y a aucune difficulté de principe mais il faut utiliser les fonctions elliptiques (voir [51]) pour définir $\mathcal{T}_0$.

L'amélioration apportée par ce procédé peut être estimée à partir des considérations suivantes :

Soit $\chi = (\alpha, \beta)$, $\chi_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, alors $\chi_1 = \tau_\varepsilon(\chi)$. En outre, si $\widetilde{\chi}_1 = \widetilde{\tau}_\varepsilon(\chi)$ alors

$$\widetilde{\chi}_1 - \chi_1 \sim \varepsilon \cdot O^3(\chi) \qquad \text{(III-55)}$$

Désignons par $\tilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^D$ la transformation osculatrice obtenue directement à partir des premiers termes de $\mathcal{T}_\varepsilon$. Posant $\tilde{x}_1^D = \tilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^D(x)$, nous avons la relation

$$\tilde{x}_1^D - x_1 \sim 0^3(x) \qquad \text{(III-56)}$$

Cette dernière différence ne tend pas vers zéro lorsque ε tend vers zéro comme pour (III-55). On voit ainsi qu'en principe, si ε est petit l'osculation indirecte doit fournir une meilleure approximation de $\mathcal{T}_\varepsilon$.

III-6-4 - Exemples numériques

Pour plusieurs valeurs des paramètres du satellite, nous avons comparé les résultats obtenus par la transformation osculatrice avec ceux obtenus par intégration numérique.

III-6-4-1 - Osculation directe

Nous avons supposé ici A = 7, B = 6, C = 8.9, H = 18.66, W = 0.05. Sur les tableaux III-4 et III-5 figurent les coefficients du développement en série de $\mathcal{T}_\varepsilon$ et les paramètres qui définissent la transformation osculatrice, correspondant à quelques valeurs de la période T.

Nous avons tracé quelques courbes représentant des trajectoires discrètes obtenues par la transformation osculatrice et par intégration numérique (figures III-7 à III-10). On observe un écart plus sensible entre les résultats soit lorsqu'on s'éloigne de l'origine soit pour des conditions initiales voisines d'une courbe invariante passant par l'origine.

T	u_1	a	b	φ_{30}	φ_{21}	φ_{12}	φ_{03}
	v_1	c	d	Ψ_{30}	Ψ_{21}	Ψ_{12}	Ψ_{03}
5		- 1.00071	0.02451	0.00016	- 1.64503	0.08196	-0.84313
		0.04885	- 1.00049	3.26647	- 0.16019	1.64459	0.00042
5.05		- 1.00023	0.04709	0.07317	- 1.68240	0.04618	-0.84323
		0.00515	- 1.00001	3.29282	- 0.23694	1.69294	-0.03762
5.06		- 1.00002	0.05160	- 0.84316	0.03912	- 1.68964	-0.08813
		- 0.00359	- 0.99980	- 0.04535	1.70242	- 0.25224	3.29769
5.1		- 0.99877	0.06964	- 0.14889	- 1.71776	0.01120	-0.84254
		- 0.03853	- 0.99855	3.31583	- 0.31331	1.73966	-0.07667

Tableau III-4 - Coefficients de la transformation $\bar{\mathcal{T}}_\varepsilon$

Période T / Paramètre	5.	5.05	5.06	5.1
μ	1	1	1	1
c	3	4	4	4
r	1	1	1	1
t_1	0.30190	0.23241	0.23361	0.23843
t_2	- 0.00657	- 0.00499	- 0.00497	- 0.00476
ν	0.88464	0.88731	0.88798	0.89109
ε	0.04074	0.04193	0.04228	0.04407
a	- 3.38699	- 3.41349	- 3.41837	- 3.43634

Tableau III-5 - Paramètres de $\tilde{\mathcal{T}}$ (voir schéma du § III-6-2 et l'Annexe C 2) ; $\gamma = \delta = 0$.

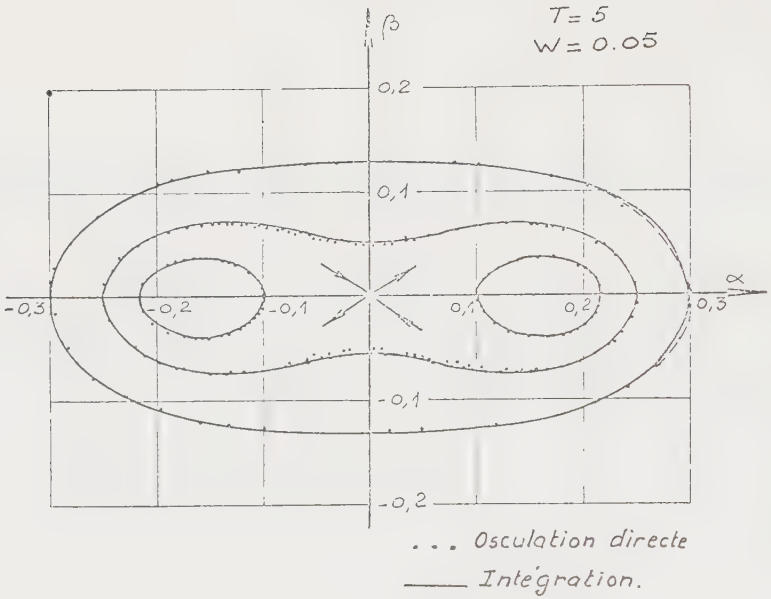


Figure III-7

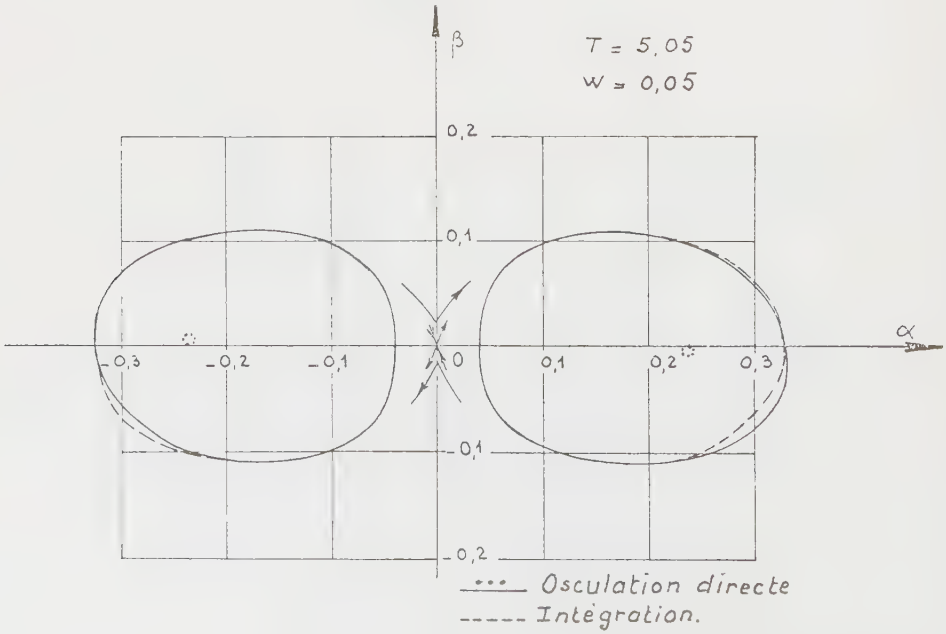


Figure III-8

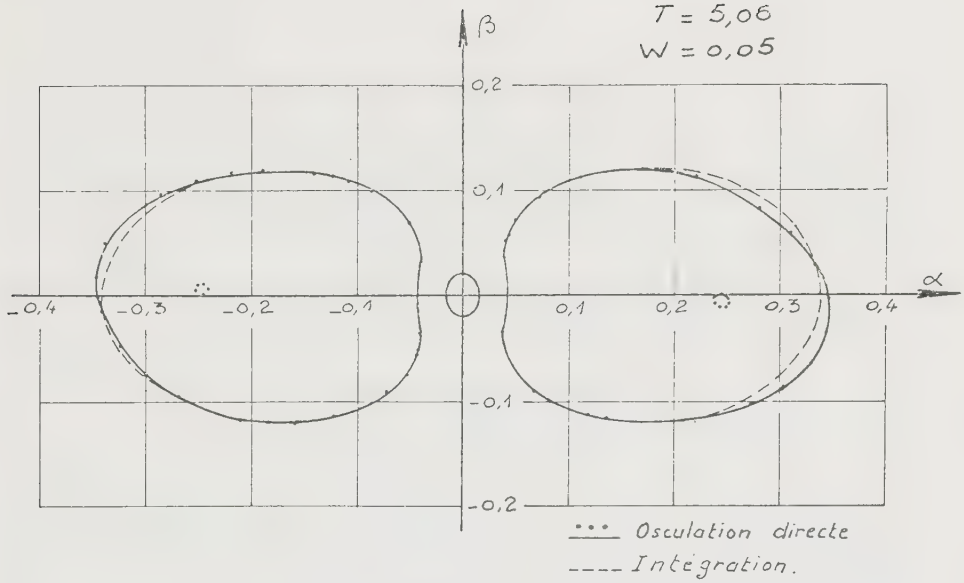


Figure III-9

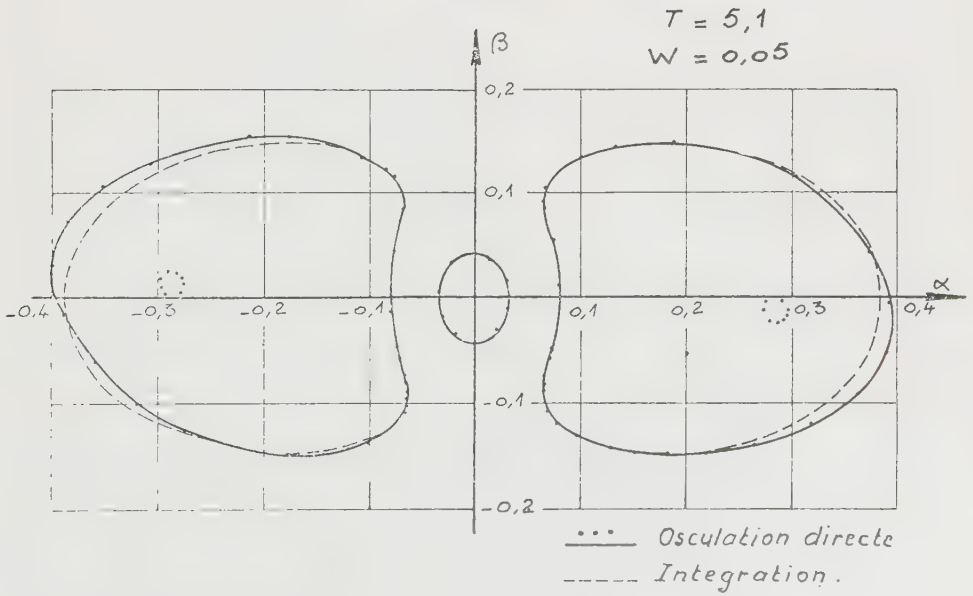


Figure III-10

Pour la transformation exacte ($\mathcal{T}_\varepsilon$) il y a symétrie par rapport aux axes α et β . La petite dissymétrie observée pour les résultats approchés est due aux termes de degré supérieur à trois de la transformation osculatrice.

Les figures montrent l'évolution du "portrait de phase" lorsque T augmente de 5. à 5.1 :

- T = 5. : Il existe autour de l'origine un cycle centre d'ordre deux. L'origine est un col de type trois.

- T = 5.05 : Les pentes des directions invariantes à l'origine ont augmenté par rapport au cas précédent et les multiplicateurs en ce point sont plus proches de la valeur - 1. Cette valeur correspond à une bifurcation qui a lieu pour une valeur de T comprise entre 5.05 et 5.06. La bifurcation est décrite par le schéma

(0, 0) col type 3 $\longrightarrow$ (0, 0)centre + cycle 2 - col

(une telle bifurcation a été déjà décrite dans [44]).

Le cas critique associé a ce changement qualitatif a été étudié dans le Chapitre I (Cas A, n = 3 de la figure I-1, considérant $\mathcal{T}_\varepsilon^2$).

- T = 5.06 : L'origine est devenue un centre. Les deux cols nés de la bifurcation décrite ci-dessus se situent sur l'axe β

- T = 5.1 : Les cycles d'ordre 2 (col et centre) s'éloignent de l'origine dont le domaine d'influence augmente.

La position de ces cycles, lorsqu'ils sont situés suffisamment près de l'origine, peut être estimée à partir des premiers termes de $\bar{\mathcal{T}}_\varepsilon$ (variables u, v) et des propriétés de symétrie. Ainsi, pour calculer les coordonnées approchées du cycle 2 -centre nous posons :

$$u_1 = bv + \varphi_{03} v^3 + \ldots = 0 \longrightarrow v \approx \pm\sqrt{-b \varphi_{03}}$$

et pour le cycle 2-col

$$v_1 = cu + \Psi_{30} u^3 + \ldots = 0 \longrightarrow \approx u \pm \sqrt{-c/\Psi_{30}}$$

Remarque : l'axe α correspond à l'axe v et l'axe β à l'axe u ; la symétrie dans le plan α , β est conservé en passant au plan u, v.

En utilisant la transformation (III-47) nous avons dans le plan α , β :

Cycle 2-centre : $\alpha \tilde{=} \pm \sqrt{-b/\Psi_{03}}$, $\beta = 0$ (III-57)

Cycle 2-col : $\alpha = 0$, $\beta \tilde{=} \pm \sin \sqrt{-c/\Psi_{30}}$ (III-58)

(voir tableau III-6).

T	Origine	Cycle 2 col	Cycle 2 centre
5	Col de type 3 $S_1 = 1/S_2 = -1.035$ $p_1 = -p_2 = 0.71$	———	$\alpha = \pm 0.171$, $\beta = 0$
5.05	Col de type 3 $S_1 = 1/S_2 = -1.0156$ $p_1 = -p_2 = 3.05$	———	$\alpha = \pm 0.236$, $\beta = 0$
		bifurcation	
5.06	Centre	$\alpha = 0$, $\beta = \pm 0.033$	$\alpha = \pm 0.247$, $\beta = 0$
5.1	Centre	$\alpha = 0$, $\beta = \pm 0.108$	$\alpha = \pm 0.287$, $\beta = 0$

Tableau III-6 - Cycles 2 autour de l'origine ; S_1, S_2 sont les multiplicateurs à l'origine ; p_1, p_2 sont les pentes des directions invariantes.

III-6-4-2 - Osculation indirecte

On considère ici les cas d'un satellite symétrique (A = B) avec les caractéristiques suivantes : A = B = 6 , C = 8.4 , H = 18.66

La transformation osculatrice est obtenue par la méthode indirecte § III-6-1. Ceci permet une précision accrue des résultats approchés dans une région plus étendue du plan des variables.

Exemple 1 : $\varepsilon = 0.05$, $T = 3,5$

Pour cet exemple, l'origine est un centre. L'influence de la perturbation se traduit nettement par la forme elliptique des trajectoires proches à l'origine (pour $\varepsilon = 0$ on aurait des cercles).

Pour la précision du tracé de la figure III-11 il n'y a pas d'écart sensible entre les trajectoires obtenues par la transformation osculatrice et celles obtenues par intégration.

Si la perturbation (ε) augmente, une bifurcation décrite par le schéma :

(0, 0) centre ⟶ (0, 0) col type 3 + cycle 2 centre

a lieu (voir aussi dans [44]).

Le cas critique associé se ramène à celui considéré au Chapitre I (Cas A, n = 3), tout comme pour la bifurcation que nous avons considérée dans III-6-4-1. Pour la valeur de bifurcation, les multiplicateurs sont égaux à - 1 et l'origine est du type elliptique (dans le cas précédent elle était du type hyperbolique).

Exemple 2 : $\varepsilon = 0,25$, $T = 3,5$

La configuration des trajectoires est analogue à celle de certains exemples du § III-6-2-1. L'écart plus prononcé entre la solution approchée et exacte est due à l'amplitude assez élevée de la perturbation.

Nous avons aussi tracé les courbes invariantes passant par l'origine (figure III-12). Il n'a pas été possible de détecter des points homoclines sur ces courbes.

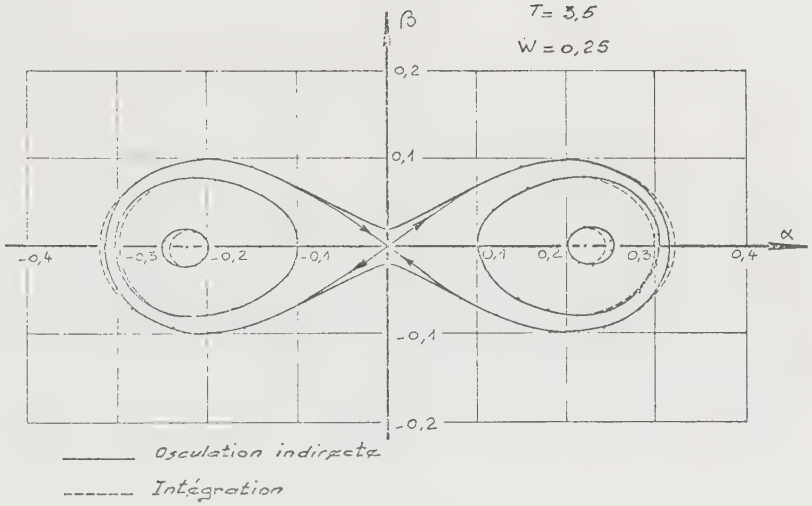


Figure III-11

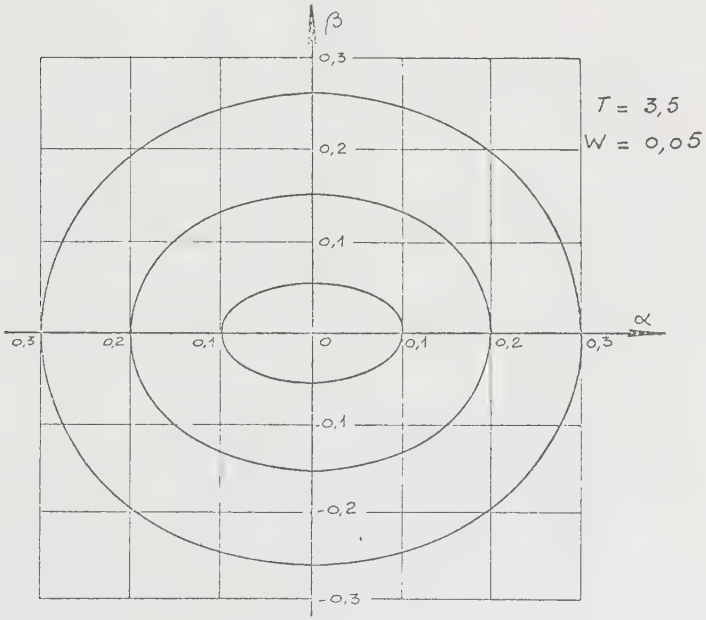


Figure III-12

Exemple 3 : $\varepsilon = 0.05$, $T = 4$

Sur la figure III-13 on vérifie que l'approximation est assez satisfaisante même pour des mouvements très éloignés de l'origine.

Nous avons aussi utilisé dans ce cas l'osculation directe pour ce cas. L'erreur était alors beaucoup plus importante que celle correspondante à la méthode d'osculation indirecte, pour $|\alpha|, |\beta| > 0,2$.

00o00

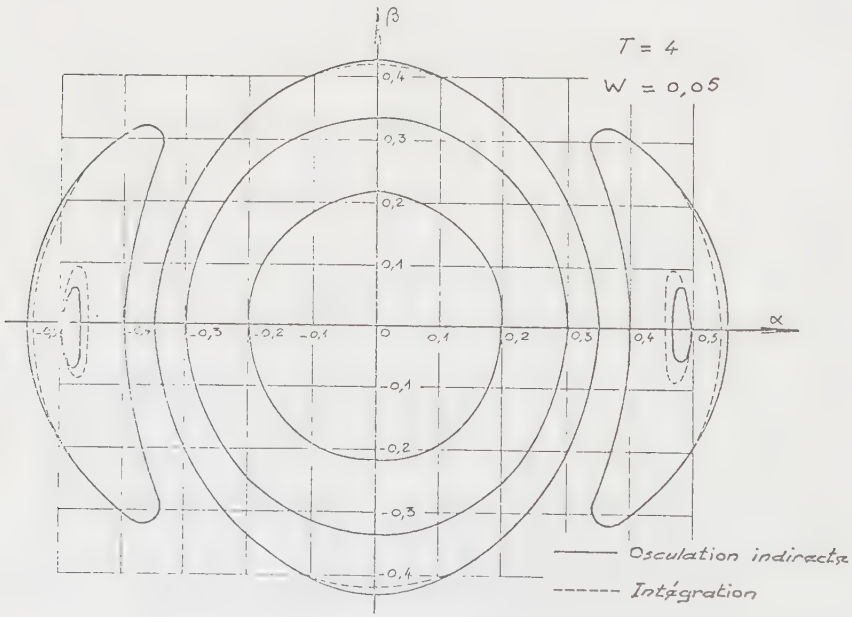


Figure III-13

Pour les trois exemples ci-dessus les coefficients de $\bar{I}_\varepsilon (= \bar{J}_o^{-1}\ \bar{J}_\varepsilon)$ sont réunis sur le tableau III-7.

T	u_1	a	b	φ_{30}	φ_{21}	φ_{12}	φ_{03}
	v_1	c	d	ψ_{30}	ψ_{21}	ψ_{12}	ψ_{03}
3.5		1.00104	- 0.02264	0.03478	- 0.02640	0.10327	0.01313
(ε =0.05)		- 0.02245	0.99917	0.03061	- 0.10565	0.02645	-0.03487
3.5		1.01032	- 0.11551	0.17796	- 0.20917	0.52374	0.03815
(ε =0.25)		- 0.11083	1.00245	0.17583	- 0.56706	0.21492	-0.18560
4.5		0.98970	-0.02452	0.04454	- 0.03018	0.14924	-0.04129
(ε =0.05)		- 0.02451	1.01100	- 0.01983	- 0.13433	0.03047	-0.05006

Tableau III-7 - Coefficients de $\bar{I}_\varepsilon (= \bar{J}^{-1}\ \bar{J}_\varepsilon)$

Le tableau III-8 donne les paramètres correspondants à la transformation osculatrice

Période T / Paramètre	3.5 (ε =0.05)	3.5 (ε =0.25)	4 (ε =0.05)
μ	1	1	1
c	0.1	0.6	0.2
r	1.	1.	1
t_1	0.41809	0.39444	0.30289
t_2	0.00125	0.00914	0.00624
ν	0.04993	0.27199	0.01141
ε	0.03443	0.17344	0.04788
$\bar{a}$	- 0.00573	- 0.03514	- 0.06672

Tableau III-8 - Paramètres de $\tilde{I}_\varepsilon$ (voir Annexe C 21), $\gamma = \delta = 0$.

III-6-5 - Transformations osculatrices sans terme de degré pair.

Dans la méthode du § III-6-2, la transformation osculatrice contenait des termes de degré pair, tandis que la transformation réelle ne possédait que des termes de degré impair. Pour éviter l'erreur introduite dans la transformation osculatrice par les termes de degré pair (notamment ceux du quatrième degré), on propose ci-dessous une méthode d'obtention de transformations osculatrices à symétrie impaire.

Considérons la transformation ponctuelle $\mathcal{T}^*$ du § III-6-2 et posons :

$$P_3(U,V) = \sum_{i+j=3} \varphi_{ij} U^i V^j \quad , \quad Q_3(U,V) = \sum_{i+j=3} \psi_{ij} U^i V^j \qquad \text{(III-59)}$$

Tout d'abord, nous allons supposer

$$\varphi_{30} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_{12}\varphi_{30} > 0 \qquad \text{(III-60)}$$

Définissons alors les quantités :

$$R_{21} = \varphi_{21}/3\varphi_{30} \qquad R_{12} = \varphi_{12}/3\varphi_{30} \qquad \text{(III-61)}$$

Reprenons ensuite les transformations (ENGELS [34])

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_r &: U_1 = U + A(U+rV)^3 \ , \ V_1 = V + \frac{A}{r}(U+rV)^3 \\ \mathcal{T}_s &: U_1 = U + \alpha A(U+sV)^3 \ , \ V_1 = U + \frac{\alpha A}{3}(U+sV)^3 \end{aligned} \qquad \text{(III-62)}$$

dont le produit $\mathcal{T}_r\,\mathcal{T}_s$ est de la forme :

$\mathcal{T}_r\,\mathcal{T}_s$:

$$\begin{aligned} U_1 &= U + A(U+rV)^3 + \alpha A(U+sV)^3 + \ldots = \mathcal{U}(U,V) \\ V_1 &= V - \frac{A}{r}(U+rV)^3 - \frac{\alpha A}{s}(U+sV)^3 + \ldots = \mathcal{V}(U,V) \end{aligned} \qquad \text{(III-63)}$$

En identifiant les termes en U^3, U^2V et V^3 de U_1 avec ceux de $P_3(U,V)$ nous obtenons les relations

$$A(1+\alpha) = \varphi_{30} \ , \ 3A(r-\alpha s) = \varphi_{21} \ , \ 3A(r^2+\alpha s^2) = \varphi_{12} \qquad \text{(III-64)}$$

Posant maintenant $s = -r$ ces relations deviennent

$$A(1+\alpha) = \varphi_{30} \quad , \quad 3As(\alpha-1) = \varphi_{21} \quad , \quad 3As^2(1+\alpha) = \varphi_{12}$$

Après quelques calculs élémentaires nous obtenons

$$s = -r = \pm\sqrt{R_{12}} \quad (R_{12} > 0), \quad \alpha = -(1 \pm R^*)/(1 \pm R^*) \qquad \text{(III-65)}$$

avec $R^* = \sqrt{R_{12}} / R_{21}$

La transformation osculatrice à $\mathcal{T}^*$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathcal{U}(U,V) + \varepsilon\left[\mathcal{V}(U,V)\right]^3 \\ V_1 &= \mathcal{V}(U,V) + \nu\, U_1^3 \end{aligned} \qquad \text{(III-66)}$$

où (par identification du terme en V^3 dans U_1 avec celui de P_3 et du terme en U^3 dans V_1 avec celui de Q_3) les valeurs de ε et ν sont définies par

$$\varepsilon = \varphi_{30} + As^3(1-\alpha) \quad , \quad \nu = \Psi_{30} - A(1-\alpha)/s \qquad \text{(III-67)}$$

Considérations pratiques :

a : les hypothèses (III-60) peuvent en général être vérifiées en utilisant le paramètre μ (voir page 124).

b : Pour des raisons semblables à celles de la remarque du § III-3, il faut chercher à obtenir $S \approx \pm 1$ par un choix convenable de μ.

III-6-5-1 - Simulation numérique

Nous avons simulé l'exemple 3 du § III-6-4-2 utilisant la méthode ci-dessus.

On a en effet constaté un écart moins prononcé entre la transformation tronquée et la transformation osculatrice que celui trouvé précédemment, surtout pour des mouvements de grande amplitude ($\alpha, \beta \approx 0.4$). En outre, la symétrie originale est mieux préservée, tandis que dans le cas du § III-6-4-2, elle était endommagée par les termes de degré pair, introduits par la méthode utilisée.

ANNEXE C 1

CALCULS INTERMEDIAIRES POUR LES SECTIONS III-3 ET III-4

$$U_1 = U + \sum_{m,n} \varphi_{mn} U^m V^n$$
$$V_1 = V + \sum_{m,n} \psi_{mn} U^m V^n \qquad m+n=2,3 \qquad \text{(C 1-1)}$$

Après avoir effectué les changements de variables (III-27) et (III-28) nous obtenons :

$$U''_1 = U'' + \varphi_{20} U''^2 + \varphi_{11} U'' V'' + \varphi_{02} V'' + \sum_{m,n} \varphi''_{mn} U''^m V''^n$$
$$V'' = V'' + \psi_{20} U'' + \psi_{11} U'' V'' + \psi_{02} V'' + \sum_{m,n} \psi''_{mn} U''^m V''^n \qquad m+n=3 \qquad \text{(C 1-2)}$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi''_{30} &= \varphi_{30} - t_1 \varphi_{11} \\
\varphi''_{20} &= \varphi_{21} - 2 t_1 \varphi_{02} + 2 t_2 \psi_{20} \\
\varphi''_{12} &= \varphi_{12} + 2 t_2 \psi_{11} - 2 t_2 \varphi_{20} \\
\varphi''_{03} &= \varphi_{03} + 2 t_2 \psi_{02} - t_2 \varphi_{11} \\
\psi''_{30} &= \psi_{30} - t_1 \psi_{11} + 2 t_1 \varphi_{20} \\
\psi''_{21} &= \psi_{21} - 2 t_1 \psi_{02} + 2 t_1 \varphi_{11} \\
\psi''_{12} &= \psi_{12} + 2 t_1 \varphi_{02} - 2 t_2 \psi_{20} \\
\psi''_{03} &= \psi_{03} - t_2 \psi_{11}
\end{aligned} \qquad \text{(C 1-3)}$$

En identifiant (C 1-3) et (III-26), les termes du second degré étant calculés comme dans la section III-3, nous arrivons au système d'équations :

$$a\ \alpha_1^3 \beta_1 = \varphi_{30} - t_1 \varphi_{11} \qquad \text{(C 1-4.1)}$$

$$3a\ \alpha_1^2 \beta_1^2 - 2\beta_1^2 \alpha_1 \delta = \varphi_{21} - 2t_1 \varphi_{02} + 2t_2 \Psi_{20} \qquad \text{(C 1-4.2)}$$

$$3a\ \alpha_1 \beta_1^3 - 4\beta_1 \alpha_1^2 \delta = \varphi_{12} + 2t_2 \Psi_{11} - 2t_2 \varphi_{20} \qquad \text{(C 1-4.3)}$$

$$a\ \beta_1^4 - 2\alpha_1^3 \delta + \varepsilon = \varphi_{03} + 2t_2 \Psi_{02} - t_2 \varphi_{11} \qquad \text{(C 1-4.4)}$$

$$-a\ \alpha_1^4 + 2\beta_1 \alpha_i^2 \gamma + \gamma = \Psi_{30} - t_1 \Psi_{11} + 2t_i \varphi_{20} \qquad \text{(C 1-4.5)}$$

$\alpha_1, \beta_1, \delta$ étant connus, les équations (C 1-4.1) à (C 1-4.3), linéaires par rapport à a, t_1, t_2, permettent la détermination de ces paramètres. Finalement ε et γ sont facilement calculés à partir des relations (C 1-4.4) et (C 1-4.5).

ANNEXE C 2

LISTING DU PROGRAMME POUR L'OSCULATION

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 MU
C
C
  100 READ(5,1000)A,B,R3,R2,R1,R0
      READ(5,1000)C,D,S3,S2,S1,S0
C
C
      READ(5,1000)A0,B0,E3,E2,E1,E0
      READ(5,1000)C0,D0,F3,F2,F1,F0
C
C
 1000 FORMAT(6F10.5)
C
C
      READ(5,101)X,Y,COEF,DIR,DIR1,PER
C
C
  101 FORMAT(6F10.5)
  102 A1=A*A0+B*C0
      B1=A*B0+B*D0
      C1=C*A0+D*C0
      D1=C*B0+D*D0
      PH30=A*E3+B*F3+R3*A0**3+R2*A0**2*C0+R1*A0*C0**2+R0*C0**3
      PH21=A*E2+B*F2+3.*R3*A0**2*B0+R2*(2.*A0*B0*C0+A0**2*D0)
     1+R1*(2.*A0*B0*D0+C0**2*B0)+3.*R0*C0**2*D0
      PH12=A*E1+B*F1+3.*R3*A0*B0**2+R2*(2.*A0*B0*D0+B0**2*C0)
     1+R1*(2.*C0*B0*D0+A0*D0**2)+3.*R0*C0*D0**2
      PH03=A*E0+B*F0+R3*B0**3+R2*B0**2*D0+R1*B0*D0**2+R0*D0**3
      PS30=C*E3+D*F3+S3*A0**3+S2*A0**2*C0+S1*A0*C0**2+S0*C0**3
      PS21=C*E2+D*F2+3.*S3*A0**2*B0+S2*(2.*A0*B0*C0+A0**2*D0)
     1+S1*(2.*C0*B0*A0+C0**2*B0)+3.*S0*C0**2*D0
      PS12=C*E1+D*F1+3.*S3*A0*B0**2+S2*(2.*A0*B0*D0+B0**2*C0)
     1+S1*(2.*C0*B0*D0+D0**2*A0)+3.*S0*C0*D0**2
      PS03=C*E0+D*F0+S3*B0**3+S2*B0**2*D0+S1*B0*D0**2+S0*D0**3
      A=A1
      B=B1
      C=C1
      D=D1
      WRITE(6,602)A,B,PH30,PH21,PH12,PH03
      WRITE(6,603)C,D,PS30,PS21,PS12,PS03
  602 FORMAT(1X,//,1X,'A,B,PH30,...',3X,6F10.5)
  603 FORMAT(1X,//,1X,'C,D,PS30,...',3X,6F10.5)
C
C
C     CHANG. DE VARIABLES
  105 X=-X
      Y=DARSIN(Y/DSQRT(1.-X*X))
C
```

$\bar{J}_0^{-1}$ (transformation unitaire pour l'osculation directe)

$\bar{J}_\varepsilon$

$\bar{I}_\varepsilon = \bar{J}_\varepsilon \bar{J}_0^{-1}$

C

```
      U=A*X+C*Y
      V=C*X+D*Y
      IF(DIR-10000.)400,400,500
400   P20=0.
      PH11B=0.
      PH02B=0.
      PS20B=0.
      PS11B=0.
      PS02B=0.

      PH30B=PH30*D**3-PH21*C*D**2+PH12*D*C**2-PH03*C**3
      PH21B=-3.*D**2*C*PH30+(A*D**2+2.*B*C*D)*PH21-(2*C**2+
     12.*A*C*D)*PH12+A*C**2*PH03*3.
      PH12B= .*B**2*D*PH30-(2**2*C+2.*A*C*D)*PH21+(A**2*D+
     12.*A*B*C)*PH12-3.*A**2*C*PH03
      PH03B=-B**3*PH30+3.*A*B**2*PH21-B*A**2*PH12+A**3*PH03
      PS30B= S30*D**3-C*D**2*PS21+D*C**2*PS12-C**3*PS03
      PS21B=-.*PS20B*PH11B-3.*PH30B-2.*PH20B*PS11B
      PS12B=.5*(4.*PS20B*PH02B-4.*PH20B*PS02B-2.*PH21B)
      PS03B=(2.*PH02B*PS11B-PH12B-2.*PS02B*PH11B)/3.
      U=U+COEF*V*V
      PH02B=-COEF
      P20=PH20B+DIR*(2.*PH12B+DIR*PH03B)
      P11=PH11B+2.*DIR*PH02B
      P02=PH 2B
      S20=PS20B+DIR*(PS11B+DIR*PS02B)-DIR*H20
      H30=PH 3B+DIR*(PH21B+DIR*PH12B+DIR**2*PH03B)
      H21=PH21B+2.*DIR*PH12B+3.*DIR**2*PH03B
      H12=PH12B+3.*DIR*PH03B
      H03=PH03B
      S30=PS 3B+DIR*(2S21B-H30+DIR*PS12B+DIR**2*PS03B)
      S11=PS11B+2.*DIR*PS02B-DIR*H11
      S02=PS02B-DIR*H02
      PH20B=H 20
      PH11B=H11
      PH02B=H02
      PS20B=S20
      PS11B=S11
      PS02B=S02
      PH30B=H30
      PH21B=H21
      PH12B=H12
      PH03B=H03
      PS30B= 30
      A2=PH20B
      R8A=PH11B/(2.00*A2)
      DELTA=PH02B-PH11B*R8A/2.00
      GAMA=PS20B+PH20B/R8A
      DETER=2.*(PH11B-PH20B)*(3.*PH11B*R8A-2.*PH02B)-6.*PS20B
     1*PH11B**2*R8A
      AL1=3.*PH20B*R8A-2.*DELTA*A2/R8A-PH21B
      BL1=3.*PH20B*R8A**2-4.*DELTA*A2-PH12B
      TAU1=(2.*(PS11B-PH20B)*AL1-2.*PS20B*BL1)/DETER
      TAU2=-(2.*PH11B*(2.*R8A*AL1-(3.*PH11B*R8A-2.*PH02B)*BL1))/DETER
      A3=PH30B-TAU1*PH11B
      EPS=PH03B+(2.*PS02B-PH11B)*TAU2+2.*A2*R8A*DELTA-A3*R8A*R8A
      PU=PS20B+(2.*PH20B-PS11B)*TAU1-2.*GAMA*A2+A3/R8A
```

```
      C
      C
   65       WRITE(6,601)GAMA,DELTA,TAU1,TAU2,RBA,MU,EPS,A3
   66     601 FORMAT(1X,///,1X,'G,D,T1,T2,RBA,MU,EPS',3X,5F10.5)
   67         DO 123 J=1,100
   68     200 XN=A*X+B*Y+PHG0+PHG1*X+PHG2*Y+PHG11*X**2+PHG12*X*Y+PHG03*Y**3
   69         YN=C*X+D*Y+PSI0+PSI1*X+PSI2*Y+PSI12*X*Y+PSI3*Y**3
   90         V=V-DIR*U
   91         UP=U
   92         VP=V+TAU1*U*U
   93         US=UP+TAU2*VP*VP
   94         VS=VP
   95         CAL=US+RBA*VS
   96         W1=US+CAL*CAL*(A2+A3*CAL)
   97         Z1=VS-CAL*CAL*(A2+A3*CAL)/RBA
   98         W2=W1+Z1*Z1*(DELTA+EPS*Z1)
   99         Z2=Z1
  100         W3=W2
  101         Z3=Z2+W2*W2*(GAMA+MU*W2)
  102         VP=Z3
  103         UP=W3-TAU2*VP*VP
  104         UN=UP
  105         VN=VP-TAU1*UP*UP
  106         VN=VN+DIR*UN
      C
      C
  107         XN1=-XN
  108         IF(DABS(XN)-1.)201,103,103
  109       201 YN1=DSIN(YN)*DSQRT(1.-XN*XN)
  110         UN1=-UN
  111         IF(DABS(UN)-1.)202,103,103
  112       202 VN1=DSIN(VN)*DSQRT(1.-UN*UN)
      C
      C
      C TRANSFORM DE LA PARTIE INTEGRABLE
  113         WOT=DSQRT(1.-XN1*XN1-YN1*YN1)*0.8865714*PER
  114         XN=XN1*DCOS(WOT)-YN1*DSIN(WOT)
  115         YN=XN1*DSIN(WOT)+YN1*DCOS(WOT)
  116         WOT=DSQRT(1.-UN1*UN1-VN1*VN1)*0.8865714*PER
  117         UN=UN1*DCOS(WOT)-VN1*DSIN(WOT)
  118         VN=UN1*DSIN(WOT)+VN1*DCOS(WOT)
      C
  119         IF((DABS(XN)+DABS(YN)).LT.1.D0) GO TO 70
  120         XN=0.D0
  121         YN=0.D0
  122       70 IF((DABS(UN)).GT.1.0D0) GO TO 103
  123         IF(MOD(J,1).EQ.0) GO TO 125
  124         GO TO 122
  125       124 IF((DABS(UN-.00000)*DABS(VN-.0000)).GT.3.3000) GO TO 122
  126       121 WRITE(6,300)XN,YN,UN,VN,J
  127       300 FORMAT(1X,2F10.5,5X,F20.15,5X,F20.15,2X,I5)
      C
      C
  128       122 UN=-UN
  129         VN=DARSIN(VN/DSQRT(1.-UN*UN))
  130         XN=-XN
  131         YN=DARSIN(YN/DSQRT(1.-XN*XN))
      C
  132         U=UN*A+VN
  133         V=C*UN+D*VN
  134         X=XN
  135         Y=YN
  136         U=U+COEF*V*V
  137       123 CONTINUE
  138       105 READ(5,101)X,Y,COEF,DIR,DIR1,PER
  139         IF(DIR1-1.)105,100,100
  140       100 STOP
  141         END
```

trans§. tronquée + $\tilde{J}$ ou $\tilde{I}_\varepsilon$

$\mathcal{C}^{-1}$

J_o

PER = 0 pour l'osculation directe

C

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire a été essentiellement l'analyse d'un cas critique pour une récurrence, jusqu'ici peu étudiée, ainsi que la considération du problème de l'association d'une transformation conservative à un système dynamique conservatif. Ce système est décrit par une équation différentielle non linéaire à coéfficients périodiques.

Dans un premier temps le cas critique est considéré pour une récurrence autonome du second ordre à variables réelles. La stabilité du point double, ainsi que l'allure des trajectoires discrètes autour de ce point, sont alors déterminées. Certains cas (dits "transcendants" au Chap. I) restent indéterminés quant à la stabilité, qui dépend alors d'un nombre infini de termes de certaines séries formelles. A notre connaissance aucune étude n'a été entreprise sur ces cas. Une telle étude semble présenter des difficultés comparables à celles relatives au problème de la stabilité d'un point elliptique du type général [2 - 23 - 24].

Le cas critique étudié correspond à une classe de bifurcations qui peuvent se produire de façon relativement fréquente dans les systèmes conservatifs (voir § III -6 - 4 et [6 0]) ou non conservatifs. Ce cas est par exemple lié à la coalescence d'un centre (ou foyer) et d'un col, de 2 cols et un centre (ou foyer), d'un noeud et un col, etc...

Dans un deuxième temps, l'étude précédente a été généralisée au cas d'une récurrence (réelle et autonome) d'ordre supérieur à deux. L'analyse de la stabilité est faite principalement en réduisant le problème initial à la considération d'une récurrence d'ordre deux du type précédemment étudié.

Les résultats obtenus ont des ressemblances avec ceux de Malkin, concernant les cas critiques pour les équations différentielles [15]. Cette analogie ne peut en général s'établir que moyennant l'hypothèse de "pseudo-incommensurabilité" d'une transformation ponctuelle (notion introduite par D. C. Lewis [20]). Ceci est lié au fait qu'il n'est pas toujours possible de trouver un système d'équations différentielles autonome,

possédant une récurrence autonome associée, ayant le même comportement qualitatif qu'une récurrence autonome donnée, de même ordre que le système différentiel. Comme exemple, citons le cas bien connu correspondant à un cas d'exception caractérisé par la présence de deux multiplicateurs du type $e^{\pm j\varphi}$, avec $\varphi = 2\pi/3$, et présentant le phénomène de résonnance paramétrique [10]. (Remarque: la distinction faite ici est différente de celle relative à l'existence de points homoclines ou hétéroclines).

En outre, nous avons aussi abordé les cas critiques à plusieurs multiplicateurs de module unitaire. Sont inclus dans cette classe les cas envisagés dans [16-37-8-9-10-32]. D'une part la méthode présentée à la section II-7 peut être utilisée comme une façon alternative pour étudier de tels cas et d'autre part elle permet aussi la considération des cas d'exception qui sont restés sans réponse dans [26].

Enfin le troisième chapitre fournit une méthode d'obtention de transformations ponctuelles conservatives pouvant représenter de façon approchée le comportement des solutions d'une équation différentielle non linéaire à coéfficients périodiques, au voisinage d'une solution périodique.

Comme application, nous avons choisi des systèmes dynamiques conservatifs liés à l'étude du mouvement transversal de particules dans un accélérateur ou dans un anneau de stockage [44] (§ III-5) et à l'étude des oscillations d'un satellite dont les inerties varient périodiquement par rapport au temps [51] (§ III-6).

Nous avons constaté (sans justification rigoureuse) que soit qualitativement soit quantitativement, les transformations approchées (ou osculatrices) représentaient assez précisément le comportement de ces systèmes dans un certain voisinage d'une solution de référence.

(la transformation "exacte", donnant le comportement réel, obtenue par intégration directe de précision relativement élevée (méthode de Runge-Kutta, 4ème ordre; erreur absolue $\sim 10^{-3}$).

Dans le premier exemple, nous avons cherché la position de cycles autour de l'origine, la frontière de "quasi-intégrabilité" et l'allure des courbes invariantes qui partent de cols (appartenant à un cycle) situés dans une région à comportement stochastique. On a constaté ainsi qu'une transformation osculatrice à la transformation exacte, jusqu'aux termes du troisième degré, donnait des résultats suffisamment précis dans le voisinnage considéré.

Dans le deuxième exemple, la récurrence associée au comportement dynamique du satellite ne présente que des termes de degré impair. Une adaptation de la méthode des sections III-3 et III-4 est alors nécessaire, mais elle ne présente aucune difficulté. La méthode adaptée, appellée "Osculation Directe" (§ III-6-2), permet l'étude de mouvements suffisamment voisins de la configuration d'équilibre. Afin de pouvoir considérer des mouvements plus éloignés de cette configuration (comportement aux grands angles) nous avons proposé une variante de la méthode précédente, basée sur l'hypothèse de "faible perturbation" des inerties du satellite. Ce procédé, appelé "Osculation Indirecte" a en effet permis l'obtention de transformations osculatrices qui représentaient le comportement du système, même pour des valeurs assez élevées des variations des cosinus directeurs du moment cinétique; ainsi, le voisinage où les résultats sont suffisamment précis est généralement bien plus grand que dans le cas de l'osculation directe.

L'avantage d'avoir des expressions algébriques définissant la transformation ponctuelle associée au système dynamique est évidente: des résultats théoriques peuvent s'appliquer directement et d'une façon générale le calcul des itérations successives sur ordinateur se fait beaucoup plus rapidement que si une méthode d'intégration numérique était utilisée. Ce dernier point présente un intérêt pour les simulations numériques, souvent utilisées dans l'étude des transformations ponctuelles qui préservent l'aire [40-41-42-43-44].

Le travail que nous avons présenté laisse encore de nombreuses questions sans réponse et il demanderait à être poursuivi sur différents points qui ont été incomplètement traités.

C'est ainsi qu'en ce qui concerne les cas critiques, nous pouvons définir quelques extensions de ce travail:

- compléter l'étude du cas critique envisagé au premier chapitre, notamment par l'analyse des cas appellés "transcendants" et des cas où le point double considéré n'est pas isolé. En outre il conviendrait aussi de caractériser de façon plus précise l'allure des trajectoires autour du point double dans les divers cas possibles.
- application de la méthode de la section II-7 à l'étude des cas critiques à plusieurs multiplicateurs de module unitaire. Citons par exemple le cas à quatre multiplicateurs complexes du type $e^{\pm j\varphi_1}$ et $e^{\pm j\varphi_2}$. Ce problème a été abordé dans [53-54] visant plus particulièrement la mise en évidence des conditions de résonnance paramétrique (cas d'exception). Un tel cas peut représenter le mouvement des particules dans un Bétatron (Récurrence autonome du 4ème ordre).
- envisager les bifurcations par traversée des cas critiques étudiés.
- examiner les cas où la stochasticité a lieu au voisinage d'un point fixe à cause de la présence de points homoclines ou hétéroclines [44].

Dans le cas de la méthode présentée au dernier chapitre, l'extension pourrait porter sur :

- l'amélioration de l'approximation obtenue par la considération de termes de degré supérieur à trois (dans la transformation ponctuelle associée au système envisagé)
- l'étude de l'erreur inhérente à la méthode pour mieux

estimer son applicabilité.

- l'application à d'autres systèmes physiques conservatifs décrits par des équations différentielles non linéaires à coéfficients périodiques.

BIBLIOGRAPHIE

1 H. POINCARE
Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. 3, Gauthier Villars.

2 G.D. BIRKHOFF
Surface transformations and their dynamical applications. Collected math. papers, Vol. 2, Dover Publ. Inc. N.Y., pp. 111-223 (1968).

3 G.D. BIRKHOFF
A remark on the dynamical rôle of Poincaré's last geometric theorem (1928) - Collected math. papers, Vol. 2, Dover Publ. Inc. N.Y., pp. 354-355 (1968).

4 T. LEVI - CIVITA
Annali di Matematica, Série 3, t. 5, 1901.

5 A.R. CIGALA
Annali di Matematica, série 3, t. 11, 1905.

6 Yu. NEIMARK
Izvetia Vuzov Radiofisika URSS, t. 1, n° 2, 1958.

7 C. MIRA
C.R.A.S. Paris, t. 270, p. 332, Série A (1970).

8 F. ROUBELLAT
Thèse de Docteur ès Sciences, Toulouse (1969) n° 364 Université Paul Sabatier.
(voir aussi : CRAS Paris, t. 268, pp. 129-132, série A (1970))

9 J.P. BABARY
Thèse de Docteur ès-Sciences, Toulouse (1969) n° 365 Université Paul Sabatier.
(voir aussi : JP. BABARY, C. MIRA, CRAS Paris, t. 268, p. 129 Série A (1969)).

10 J.L. ABATUT
Thèse de Docteur ès-Sciences, Toulouse (1970) n° 395, Université Paul Sabatier.

11 N. BAUTIN
Comportement des systèmes dynamiques au voisinage des limites du domaine de stabilité. Goestekhizdat, Moscou 1949.

12 W. HAHN
Stability of motion, t. 138, 1967
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York.

13 A.M. LYAPUNOV
Problème général de la stabilité du mouvement.
Ann. Fac. Sci. Toulouse, 9, 203-474 (1907)

14 A.M. LYAPUNOV
Stability of motion, vol. 30, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, N.Y. 1966.

15 I.G. MALKIN
Théorie de la stabilité du mouvement (en Russe).
Moskow 1952.

16 Yu. NEIMARK
The method of point mapping in the theory of nonlinear oscillations. Symposium international sur les oscillations non linéaires, Kiev, 1961.

17 A.A. ANDRONOV - A.A. VITT - S.E. KHAIKIN
"Theory of Oscillators", Pergamon Press, 1966.

18 I. GUMOWSKI - C. MIRA
"Sensitivity problems related to certain bifurcations in non linear recurrence relations. Automatica, Vol. 5, pp. 303-317, 1969.

19 P. VIDAL
Non linear sampled data systems. Gordon and Breach, 1969.

20 D.C. LEWIS Jr.
Formal power series transformations.
Duke Mathematical Journal, 1939, Vol. 5, p. 794.

21 G.D. BIRKHOFF
Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. Collec. math. papers, vol. 2, Dover Pub. Inc. N.Y., pp. 530-661.

22 I. GUMOWSKI - C. MIRA
Boundaries of stochasticity domains in Hamiltonian systems.
Proc. 8th Inter. Conference on High Energy Accelerators, CERN, Genève, Sept. 1971.

23 V.I. ARNOLD - A. AVEZ
Problèmes ergodiques de la mécanique classique
Gauthier Villars, Paris (1967)

24 C.L. SIEGEL - J.K. MOSER
Lectures on celestial mechanics, t. 187, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

25 P.M. DIAMOND
Analytic invariants of mappings of two variables.
Journal of Mathematical Analysis and Applications 27, pp. 601-608 (1969).

26 L. PUN
Thèse de Docteur ès-Sciences, Toulouse (1971) n° 448 Université Paul Sabatier. (voir aussi : C. MIRA - L. PUN, C.R.A.S. Paris, t. 272, p. 505-508, 1971).

27 G.D. BIRKHOFF
Dynamical systems - American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. IX (1966).

28 W. HAHN
Theory and application of Liapunov's direct method.
Prentice Hall International series in Applied Mathematics (1961)

29 LIU HSU
C.R.A.S. Paris, t. 275, p. 671, série A (1972).

30 G.D. BIRKHOFF
Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique.
Collected math. papers, vol. 2, Dover Pub. Inc. N.Y. p. 444

31 E.E. CROSBIE - T.K. KHOE - R.J. LARI
The effects of a delta function sextuple field on phase space trajectories.
IEEE Transactions on Nuclear Science, n° 3, pp. 1077-1081, June 1971.

32 L. PUN
Initial conditioned solutions of a second order nonlinear conservative differential equation with periodically varying coefficient.
Journal of the Franklin Institute, vol. 295, n° 3, March 1973.

33 J. BERNUSSOU - LIU HSU - C. MIRA
On nonlinear periodic differential equations and associated point mappings. Application to stability problems. A paraître.

34 W. ENGELS
Gaaze cremona transformationen von primzahlgrad in der ebene.
Math. Annalen, Bd. 136, S 319-325, 1958.

W. RALSTON
Mathematical methods for digital computers.
Wiley, New York, pp. 95-109, 1960.

36 B.V. CHIRIKOV
Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity, CERN Translation 71-40, Genève 1971.

C. MIRA
Etude d'un premier cas d'exception pour une récurrence ou une transformation ponctuelle autonome du deuxième ordre à variables réelles.
C.R.A.S. Paris, t. 269, pp. 1006-1009, 1969.

G.D. BIRKHOFF - P.A. SMITH
Structure analysis of surface transformations.
Collect. Mathematical Papers, Dover Public. Inc. N.Y.,
Vol. 2 pp. 360-394.

N.F. STEWART - J. BERNUSSOU - LIU HSU
C.R.A.S. Paris, t; 275 (1972), série A, p. 545

40 M. HENON
Numerical study of some quadratic area preserving mapping.
Quaterly of Applied Mathematics, 27, 1969.

41 J. FORD
Empirical determination of integrability for nonlinear oscillators systems using area preserving mappings.
Actes du Colloque International "Transformations Ponctuelles et applications" Toulouse, 10-14 september 1973.

42 C. FROESCHLE
Numerical study of the stochasticity of dynamical systems with more than two degrees of freedom.
Journal of Computational Physics, vol. 11 n° 3, March 1973.

43 L.J. LASLETT - E.M. McMILLAN - J. MOSER
Report NYO 1480-101, New York University, July 1968.

44 I. GUMOWSKI
Some properties of large amplitude solutions of conservative dynamic systems.
CERN/Si/int. BR/72-1, Genève 1972.

45 ZLATUSTOV B.A. - OKHOTSIMSKIJ D.E. - SARICHEV V.A. TORZEVSKIJ A.P.
Oscillations d'un satellite dans le plan d'une orbite elliptique - en russe - Kossm. Issl., 2, 1964, pp. 657-666.

46 V.N. MELEKIN
Theory of nonlinear difference equations and resonance instability in phase oscillations in a microtron and of oscillations of rays in open resonators.
Soviet Physics JETP Volume 34, n° 4, April 1972.

47 J. BERNUSSOU - LIU HSU - C. MIRA
Quelques exemples de solutions stochastiques bornées dans les récurrences autonomes du 2ème ordre.
Colloque International T.P.A., 10-14 septembre 1973, Toulouse.

48 M. HENON - C. HEILES
The applicability of the third integral of motion. Some numerical experiments. The Astronomical Journal, 69, n° 1, 1964, Februar n° 1316 (73-79).

49 CHIRIKOV - IZRAELIEV
Quelques essais numériques sur une transformation non linéaire. Composante stochastique. Actes du Colloque International "Transformations Ponctuelles et applications", Toulouse, 10-14 Septembre 1973.

50 C. HAYASHI
Communication présentée à la Conférence Internationale sur les Oscillations non linéaires, Poznam, 1972.

51 A. LIEGEOIS
Thèse de Docteur ès-Sciences, Toulouse, 1972, n° 518, Université Paul Sabatier.

52 A. GIRAUD
Thèse Docteur Ingénieur, Toulouse, 1969, Université Paul Sabatier.

53 J. BERNUSSOU
Thèse docteur ès-Sciences (1974) Toulouse, Université Paul Sabatier.

54 C. MIRA
C.R.A.S. Paris, t. 272, pp. 1727-1730, Juin 1971, Série A

55 E.I. JURY
Theory and application of the z-transform method.
J. Wiley, 1964.

56 Y.A. Z. TSYPKIN
Sampling systems theory and its applications
Pergamon Press, 1964.

57 V.M. KUNTSEVITCH - Y.N. CHEKHOVOI
Commande de systèmes non linéaires.
Edition : Tecnika - Kiev, 1970.

58 R. VALETTE
Thèse de Docteur Ingénieur, Toulouse, 1971, Université Paul Sabatier.

59 CONTOPOULOS G. - HADJIDEMETRIOU J.D.
Characteristic of invariant curves of plane orbits.
The Astr. Jl, Vol. 73, n° 2, part 1, March 1968.

60 I. GUMOWSKI - J.K. TRICKETT
Some properties of a conservative second order recurrence with a bounded non-linearity, Actes du Colloque international Transformations Ponctuelles et applications, Toulouse, 10-14 Septembre 1973.

GLOSSAIRE

- Equations aux récurrences, transformations ponctuelles, notées T (pour le second ordre) ; relation qui au point $M_n\ (x_n,\ y_n)$ fait correspondre le point $M_{n+1}\ (x_{n+1},\ y_{n+1})$

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n,\ y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n,\ y_n) \end{cases}$$

M_{n+1} est appelé conséquent de M_n. Les équations (1) ont été écrites dans le cas autonome ; le cas non autonome se différencie par le fait que l'instant discret n apparaît explicitement comme argument des fonctions f et g. Supposons f et g uniformes.

- Point double : $M_0\ (x_0,\ y_0)$
il vérifie

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 = f(x_0,\ y_0) \\ y_0 = g(x_0,\ y_0) \end{cases}$$

- Cycle d'ordre m, m entier = tout point $M_m\ (x_n,\ y_n)$ dont les coordonnées vérifient

$$(3)\qquad \begin{cases} x_{n+m} = x_n \\ y_{n+m} = y_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+\ell} \neq x_n \\ y_{n+\ell} \neq y_n \end{cases} \quad \text{pour } \ell \text{ entier} < m$$

- Jacobien, matrice des dérivées partielles

c'est la matrice

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

le jacobien est le déterminant de la matrice aux dérivées partielles : J.

- Transformation ponctuelle qui conserve les aires

Elle est telle que le jacobien est égal à 1 en tout point du plan (x_n, y_n).

- Trajectoire discrète

C'est l'ensemble des conséquents d'un point quelconque M_n.

- Equation caractéristique, multiplicateurs

Pour un point double, l'équation caractéristique est

$$\det \left([J] - S \, \mathbb{1} \right)_{x_0, y_0} = 0$$

$\mathbb{1}$ étant la matrice unitaire.

Les racines en S sont appelées multiplicateurs du point double. Pour un cycle, la matrice $[J]$ est obtenue par multiplication (à gauche) des matrices aux dérivées partielles, calculées en chaque point du cycle, à chaque pas d'application de la transformation T.

- Cas d'exception

La définition exacte demanderait l'introduction de notions qui échappent à notre contexte. Elle pourra être trouvée dans [10] . Nous rappelons seulement une situation particulièrement intéressante : c'est lorsqu'il

est possible de définir q directions invariantes passant par le point double (ou cycle) (les multiplicateurs au point double considéré sont du type $S_{1,2} = e^{\pm j\varphi}$, $\varphi = 2\pi\, k/q$; k, q entiers).

- Courbe invariante (formelle, analytique, réelle) passant par l'origine

Voir définition rigoureuse au § I-2-2-1.

- Stabilité selon la m-ème approximation [28]

Soit le système différentiel

$$\dot{\underline{x}} = f^{(r)}(\underline{x}, t) + f^{(r+1)}(\underline{x}, t) + \ldots + f^{(m)}(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t) \tag{4}$$

où les composantes de $f^{(k)}(\underline{x}, t)$ sont des formes d'ordre k en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$) avec coefficients continus et bornés. Le terme $g(\underline{x}, t)$ comprend tous les termes dont le degré dépasse le nombre m, de manière que

$$\left| g(\underline{x}, t) \right| < a \left| \underline{x} \right|^m \qquad (a = \text{constante}) \tag{5}$$

(normes euclidiennes).

Définition 1 : Le mouvement non perturbé $\underline{x} = \underline{0}$ de (1) est dit stable selon la m-ème approximation si pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$ dépendant seulement de ε et a, peut être déterminé de façon à avoir pour $\left| \underline{x}(t_0) \right| < \delta$, l'inégalité

$$\left| \underline{x}(t) \right| < \varepsilon \qquad (t > t_0)$$

indépendamment de la forme particulière de $g(\underline{x}, t)$, pourvu que l'inégalité (5) soit satisfaite. Si de plus $\lim_{t \to \infty} \left| \underline{x}(t) \right| = 0$, la solution est dite asymptotiquement stable selon la m-ème approximation.

Si avec la même hypothèse sur $g(\underline{x}, t)$ il existe un nombre $\varepsilon > 0$ (dépendant de a) et un nombre $\tau = \tau(\varepsilon)$ tel que pour δ arbitrairement petit et un choix arbitraire de $g(\underline{x}, t)$ il y a au moins un mouvement $\tilde{\underline{x}}(t)$

avec $\left|\tilde{\underline{x}}(t_0)\right| < \delta$ qui satisfasse la relation $\left|\tilde{\underline{x}}(t+\tau)\right| \geqslant \varepsilon$, alors le mouvement non perturbé $\underline{x} = \underline{0}$ est dit instable selon la m-ème approximation.

Remarque : Dans la notation $\underline{x}$ le trait indique que $\underline{x}$ est un vecteur. Nous le supprimons dans le texte lorsqu'il n'y a pas possibilité de confusion.

- Cas critique au sens de LJAPUNOV.

  Un des multiplicateurs (au moins) est égal à 1 en module (les autres étant inférieurs à 1).

- Points hompclines, hétéroclines

  Points d'intersection de deux courbes invariantes analytiques. Dans le cas où ces courbes sont issues d'un même point double ou de deux points appartenant au même cycle, il s'agit d'un point homocline. Dans le cas contraire, on parle de points hétéroclines.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I - Analyse d'un cas critique pour une récurrence autonome du second ordre. 13

I-1 - Introduction 15

I-2 - Développement théorique et analyse du cas critique 19

I-2-1 - Changements de variables préliminaires 20

I-2-2 - Courbes invariantes et propriétés de stabilité 22

I-2-2-1 - Détermination de certaines courbes invariantes 22

I-2-2-2 - Existence de courbes invariantes réelles 25

I-2-2-3 - Quelques critères d'instabilité de l'origine pour la récurrence (I-1) 27

I-2-3 - Etude de la stabilité à l'aide de la méthode directe de Lyapunov. 31

I-2-3-1 - Equations différentielles associées à la récurrence (I-1) 31

I-2-3-2 - Système différentiel formel associé à la récurrence(I-6)lorsque $m \leqslant n$, $\varphi_{mo} \neq 0$, $\psi_{no} \neq 0$ 35

I-2-3-3 - Système d'équations différentielles à coéfficients périodiques associés à(I-6)lorsque $m \leqslant n$, $\varphi_{mo} \neq 0$, $\psi_{no} \neq 0$ 36

I-2-3-4 - Etude de la stabilité du système différentiel associé,par la méthode directe de Lyapunov. 37

I-2-4 - Etude de la stabilité du point fixe x=y=0 de la récurrence(I-1)à l'aide de certaines fonctions transcendantes définies par Lyapunov 39

I-2-4-1 - Rappel des résultats de Lyapunov 40

I-2-4-2 - Extension des résultats de la section précédente au cas d'un système du type (I-39) 43

I-2-4-3 -Application des résultats précédents au problè-

me de stabilité de la récurrence (I-1) 46

I-3 - Résumé des résultats obténus dans le Chap. I, concernant la stabilité de l'origine, pour une récurrence du type (I-1) 49

I-4 - Exemples et simulations numériques 52

I-4-1 - Quelques cas étudiés dans le § I-2-2 52

I-4-2 - Quelques exemples pour le § I-2-3 55

I-4-3 - Une application du § I-2-4 57

I-4-4 - Analyse de la stabilité d'un système de commande échantilloné, décrit par une récurrence du type (I-1) 60

Annexes

A1: Courbes invariantes 64

A2: Equation différentielle formelle associée à (I-6) ($m \leq n$, $\varphi_{mo} \neq 0$ et $\psi_{no} \neq 0$) 67

CHAPITRE II - Analyse d'un cas critique pour une récurrence autonome de degré supérieur à deux. 71

II-1 - Introduction 73

II-2 - Sur les systèmes différentiels associés à une transformation ponctuelle 74

II-2-1 - Rappel de certains résultats de G. D. Birkhoff et D. C. Lewis 76

II-2-2 - Systèmes différentiels à coéfficients périodiques associés à la transformation T 79

II-3 - Définition de la récurrence étudiée. Changements de variables préliminaires. 88

II-4 - Système différentiel formel associé à la récurrence (I-31). 90

II-5 - Stabilité de l'origine pour la récurrence T_1, à N+2 dimensions 92

II-5-1 - Théorème (Malkin) 93

II-5-2 - Stabilité selon la K_1-ème approximation, pour le système (II-49) 94

II-6 - Exemple 99

II-7 - Cas critique général, pour les récurrences autonomes sans multiplicateur nul au point double considéré 106

Annexes:

B1: Equations fonctionnelles (II-32) et (II-66) 109

B2: Courbes invariantes des systèmes $\hat{D}_R$ (II-53) et $\check{D}_R$ (II-54) 113

CHAPITRE III - Transformation ponctuelle polynomiale préservant l'aire et osculatrice à une transformation analytique associée à un système dynamique conservatif 115

III-1 - Introduction 117

III-2 - Détermination des termes initiaux des séries P et Q de (III-2) 120

III-3 - Osculation jusqu'au second degré 121

III-4 - Osculation jusqu'au troisième degré 125

III-5 - Quelques essais numériques 128

III-6 - Application à l'étude du comportement dynamique d'un satellite dont les inerties sont des fonctions périodiques du temps 139

III-6-1 - Système différentiel décrivant le comportement libre du corps principal 139

III-6-2 - Osculation directe 142

III-6-3 - Osculation indirecte 144

III-6-4 - Exemples numériques 146

III-6-4-1 - Osculation directe 146

III-6-4-2 - Osculation indirecte 151

III-6-5 - Transformations osculatrices sans terme de degré pair 156

III-6-5-1 - Simulation numérique 157

Annexes

C1: Calculs intermédiaires pour les sections III-3 et III-4 158

C2: Listing du programme pour l'osculation 160

CONCLUSION 163

BIBLIOGRAPHIE 171

GLOSSAIRE 179

Autorisation de Soutenance accordée

TOULOUSE, le 22 MARS 1974

Le Président
de l'Université PAUL-SABATIER

L. LARENG